LÖSNINGAR

OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 22 januari 2005 fm v, 3 timmar

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.

1. (Black-Scholes modell) Låt K vara ett positivt reellt tal. Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet 1 om $\mid S(T)-K \mid\leq \frac{1}{10}K$ och i annat fall utbetalas ingenting. Bestäm derivatets pris vid tiden 0.

Lösning: Sätt $g(s)=1_{[\frac{9}{10}K,\frac{11}{10}K]}(s)$ och notera att derivatet utbetalar beloppet $g(S(T))$ slutdagen T. Om $s=S(0)$ ges derivatets pris vid tiden 0 av

$$\Pi(0)=e^{-rT}E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W(T)})\right]$$

$$=e^{-rT}P\left[\frac{9}{10}K\leq se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W(T)}\leq\frac{11}{10}K\right]$$

$$=e^{-rT}P\left[\ln\frac{9K}{10s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T\leq\sigma W(T)\leq\ln\frac{11K}{10s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T\right]$$

$$=e^{-rT}P\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln\frac{9K}{10s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)\leq W(1)\leq\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln\frac{11K}{10s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)\right]$$

$$=e^{-rT}\left\{\Phi(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln\frac{11K}{10S(0)}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T))-\Phi(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln\frac{9K}{10S(0)}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T))\right\}$$

$$\leftarrow SVAR$$

2. Två positiva stokastiska variabler U och V har frekvensfunktionerna

$$f_U(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-1-\ln x},\ x>0$$

respektive

$$f_V(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-1-\ln x}(1+\sin(2\pi\ln x)),\ x>0.$$

Visa att

$$E\left[U^n\right]=E\left[V^n\right]$$

för alla $n \in \mathbf{N}$.

Lösning: Låt $n \in \mathbf{N}$ vara fixt. Eftersom

$$E\left[U^n\right] = \int_0^\infty x^n f_U(x)dx$$

och

$$E\left[V^n\right] = \int_0^\infty x^n f_U(x)dx + \int_0^\infty x^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1-\ln x} \sin(2\pi \ln x)dx$$

räcker det att visa att

$$\int_0^\infty x^n x^{-1-\ln x} \sin(2\pi \ln x)dx = 0.$$

Substitutionen $x = e^t$ ger

$$\int_0^\infty x^n x^{-1-\ln x} \sin(2\pi \ln x)dx = \int_{-\infty}^\infty e^{nt} e^{-t^2} \sin(2\pi t)dt$$

$$= e^{\frac{n^2}{4}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(t-\frac{n}{2})^2} \sin(2\pi t)dt = e^{\frac{n^2}{4}} \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} \sin(2\pi s + n\pi)ds$$

$$= (-1)^n e^{\frac{n^2}{4}} \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} \sin(2\pi s)ds = 0$$

eftersom integranden i den senare integralen är udda.

3. Betrakta binomialmodellen där $d = -u < 0$, $0 < r < u$ och där $T = 2N+1$ är ett udda positivt heltal. Ett aktiederivat av europeisk typ ger innehavaren beloppet 1 om aktiepriset slutdagen T är lika med $S(0)e^u$ och i annat fall erhåller innehavaren ingenting. Bestäm derivatets värde vid tiden 0. (Att behandla fallet $N = 1$ korrekt ger 1.5 poäng.)

Lösning: Sätt

$$g(s) = 1_{\{S(0)e^u\}}(s)$$

så att derivatets värde vid tiden 0 ges av

$$\Pi(0) = e^{-rT} \sum_{i_1,\ldots,i_T=u,d} q_{i_1} \cdot \ldots \cdot q_{i_T} g(S(0)e^{i_1+\ldots+i_T})$$

där

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}$$

och

$$q_d = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}.$$

Alltså är

$$\Pi(0) = e^{-rT} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_T=u,d \\ i_1+\ldots+i_T=u}} q_{i_1} \cdot \ldots \cdot q_{i_T}$$

$$= e^{-rT} \left(\begin{array}{c} T \\ N \end{array} \right) \frac{(e^r - e^d)^{N+1}(e^u - e^r)^N}{(e^u - e^d)^T} \leftarrow SVAR$$

4. Visa att

$$S(t) - c(t, S(t), K; T) = Ke^{-r(T-t)} - p(t, S(t), K; T)$$

om dominansprincipen gäller.

5. En reellvärd Gaussisk process $(X_k)_{k=1}^n$ uppfyller

$$\text{Cov}(X_j, X_k) = 0 \text{ för } j \neq k.$$

Visa att de stokastiska variablerna $X_1, ..., X_n$ är stokastiskt oberoende.