LÖSNINGAR
OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 28 maj 2005 fm v, 4 timmar
Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.

1. (Dominansprincipen) Ett finansiellt derivat av europeisk typ utbetalar beloppet $\max(0, \min(S(T)-K, L))$ slutdagen T, där K och L är givna positiva storheter. Bestäm en portfölj bestående av aktieköpoptioner som replikerar derivatet (dvs i varje tidpunkt har samma värde som derivatet).

Lösning: a) Låt $\mathrm{call}_e(K,T)$ beteckna en europeisk köpoption med lösenpris K och slutdag T. Det gäller att

$$\min(S(T)-K, L) = \begin{cases} S(T)-K \text{ om } S(T) \leq K+L \\ L \text{ om } S(T) > K+L \end{cases}$$

varför

$$\max(0, \min(S(T)-K, L)) = (S(T)-K))^+ - (S(T)-(K+L))^+.$$

Beroende på dominansprincipen replikerar därför portföljen

$$\{1\ \mathrm{call}_e(K,T),\ \ -1\ \mathrm{call}_e(K+L,T)\} \leftarrow SVAR$$

derivatet.

2. (Black-Scholes modell) Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet 1 om $\mid S(T)-S(0) \mid \leq \frac{1}{2}S(0)$ och i annat fall utbetalas ingenting. Antag $t<T$ och att derivatet hedgas med $h_S(t) = v'_s(t, S(t))$ aktier vid tiden t, där $v(t,S(t))$ betecknar detrivatets pris vid tiden t. a) Bestäm $v(t,S(t))$. b) För vilka aktiepriser $S(t)$ är $h_S(t) \geq 0$?

Lösning: a) Sätt $g(s) = 1_{\left[\frac{1}{2}S(0), \frac{3}{2}S(0)\right]}(s)$ och notera att derivatet utbetalar beloppet $g(S(T))$ slutdagen T. Om $s = S(t)$ och $\tau = T-t > 0$ ges derivatets pris vid tiden t av

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)})\right]$$

$$= e^{-r\tau} P\left[\frac{1}{2}S(0) \le s e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)} \le \frac{3}{2}S(0)\right]$$

$$= e^{-r\tau} P\left[\ln\frac{S(0)}{2s} - (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau \le \sigma W(\tau) \le \ln\frac{3S(0)}{2s} - (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau\right]$$

$$= e^{-r\tau} P\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(\ln\frac{S(0)}{2s} - (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau) \le W(1) \le \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(\ln\frac{3S(0)}{2s} - (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau)\right]$$

$$= e^{-r\tau}\left\{\Phi(\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(\ln\frac{3S(0)}{2s} - (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau)) - \Phi(\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(\ln\frac{S(0)}{2s} - (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau))\right\}$$

$\leftarrow SVAR$

b) Om $\varphi = \Phi'$ erhålls

$$v'_s(t,s) = -e^{-r\tau}\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{s}$$

$$\times\left\{\varphi(\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(\ln\frac{3S(0)}{2s} - (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau)) - \varphi(\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(\ln\frac{S(0)}{2s} - (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau))\right\}.$$

Alltså är $v'_s(t,s) \ge 0$ om och endast om

$$\varphi(\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(\ln\frac{3S(0)}{2s} - (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau)) \le \varphi(\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(\ln\frac{S(0)}{2s} - (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau))$$

dvs

$$(\ln\frac{3S(0)}{2s} - (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau)^2 \ge (\ln\frac{S(0)}{2s} - (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau)^2.$$

Detta är ekvivalent med att

$$S(t) = s \le \frac{\sqrt{3}}{2}S(0)e^{-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau} \leftarrow SVAR$$

3. Två aktieprisprocesser

$$\begin{cases} S_1(t) = S_1(0)e^{\alpha_1 t + \sigma_1 W_1(t)}, \ 0 \le t \le T \\ S_2(t) = S_2(0)e^{\alpha_2 t + \sigma_2 W_2(t)}, \ 0 \le t \le T \end{cases}$$

beskriver en bivariat geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift och korrelationsparametern $\rho \in \,]-1,1[$. En aktiefond är vid tiden 0 intresserad av att sätta ihop en värdelös portfölj $\mathcal{A}$ bestående av $\frac{10^8}{S_1(0)}$ aktier av aktieslag

1 och $-\frac{10^8}{S_2(0)}$ aktier av aktieslag 2 och vill därför känna sannolikheten att portföljens värde $V_{\mathcal{A}}(T)$ vid tiden T är positivt samt väntevärdena av $V_{\mathcal{A}}(T)$ och $(V_{\mathcal{A}}(T))^2$. Vad blir dessa storheter?

Lösning: Det gäller att

$$V_{\mathcal{A}}(T) = K(e^{\alpha_1 T+\sigma_1 W_1(T)} - e^{\alpha_2 T+\sigma_2 W_2(T)})$$

där $K = 10^8$. Härav följer att

$$P\left[V_{\mathcal{A}}(T) > 0\right] = P\left[e^{\alpha_1 T+\sigma_1 W_1(T)} > e^{\alpha_2 T+\sigma_2 W_2(T)}\right]$$

$$= P\left[(\alpha_1 - \alpha_2)T + \sigma_1 W_1(T) - \sigma_2 W_2(T) > 0\right].$$

Sätt $X_{\pm} = \sigma_1 W_1(T) \pm \sigma_2 W_2(T) \in N(0, \sigma_{\pm}^2 T)$ där

$$\sigma_{\pm}^2 T =_{def} E\left[(\sigma_1 W_1(T) \pm \sigma_2 W_2(T))^2\right] = (\sigma_1^2 \pm 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)T.$$

Vi får nu

$$P\left[V_{\mathcal{A}}(T) > 0\right] = \Phi(\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\sqrt{T}}{\sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}) \leftarrow SVAR$$

Eftersom

$$E\left[e^{\xi G}\right] = e^{\frac{\xi^2}{2}},\ \xi \in \mathbf{R}$$

då $G \in N(0,1)$ följer också att

$$E\left[V_{\mathcal{A}}(T)\right] = K(e^{(\alpha_1+\frac{1}{2}\sigma_1^2)T} - e^{(\alpha_2+\frac{1}{2}\sigma_2^2)T}) \leftarrow SVAR$$

och

$$E\left[(V_{\mathcal{A}}(T))^2\right]$$

$$= K^2 E\left[e^{2\alpha_1 T+2\sigma_1 W_1(T)} - 2e^{(\alpha_1+\alpha_2)T+\sigma_1 W_1(T)+\sigma_2 W_2(T)} + e^{2\alpha_2 T+2\sigma_2 W_2(T)}\right]$$

$$= K^2(e^{2(\alpha_1+\sigma_1^2)T} - 2e^{(\alpha_1+\alpha_2+\frac{1}{2}\sigma_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2+\frac{1}{2}\sigma_2^2)T} + e^{2(\alpha_2+\sigma_2^2)T}) \leftarrow SVAR$$

4. Visa att ett nödvändigt och tillräckligt villkor för existens av arbitrage i binomialmodellen med en period är att $r \notin \,]d,u[$.

5. Ett enkelt europeiskt derivat som utbetalar beloppet $Y = g(S(T))$ slutdagen T har i Black-Scholes modell vid tiden $t < T$ priset

$$e^{-r\tau} E\left[g\left(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)}\right)\right]$$

där $s = S(t)$ och $\tau = T - t$. Bestäm med hjälp härav Black-Scholes pris för en köpoption med lösenpriset K.