LÖSNINGAR
OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 3 sep 2005 fm, 4 timmar
Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.

1. (Binomialmodellen med $T = 2$, $d = 0$, $u > 0$ och $0 < r < u$) Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar slutdagen 2 beloppet

$$Y = \max_{0 \le t \le 2} S(t) - S(1).$$

Bestäm derivatets pris vid tiden 0.

Lösning. Sätt $S(0) = s$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}}, \; t = 0, 1.$$

Låt $v(t)$ beteckna derivatets pris vid tiden t. Vi har

$$\begin{aligned} v(2)_{|X_1=u,X_2=u} &= se^{2u} - se^u = se^u(e^u - 1) \\ v(2)_{|X_1=u,X_2=d} &= se^u - se^u = 0 \\ v(2)_{|X_1=d,X_2=u} &= se^u - s = s(e^u - 1) \\ v(2)_{|X_1=d,X_2=d} &= s - s = 0 \end{aligned}$$

och definieras

$$q_u = \frac{e^r - 1}{e^u - 1} = 1 - q_d$$

blir

$$\begin{aligned} v(1)_{|X_1=u} &= e^{-r}(q_u se^u(e^u - 1) + q_d 0) = se^u(1 - e^{-r}) \\ v(1)_{|X_1=d} &= e^{-r}(q_u s(e^u - 1) + q_d 0) = s(1 - e^{-r}). \end{aligned}$$

Alltså blir

$$v(0) = e^{-r}(q_u se^u(1 - e^{-r}) + q_d s(1 - e^{-r}))$$

$$= e^{-r}s(1 - e^{-r})\frac{1}{e^u - 1}(e^{r+u} - e^u + e^u - e^r)$$

$$= s(1 - e^{-r}) \leftarrow SVAR$$

2. (Black-Scholes modell) Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar beloppet $\frac{S(T)+1}{S(T)}$ vid tiden T. Bestäm derivates pris vid tiden $t < T$.

Lösning. Sätt $\tau = T - t$, $g(S) = \frac{S+1}{S}$, $Y = g(S(T))$ och $s = S(t)$. Det är känt att derivatets pris vid tiden t ges av ekvationen

$$\Pi_Y(t) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})\right]$$

$$= e^{-r\tau} E\left[1 + \frac{1}{se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)}}\right] = e^{-r\tau} + e^{-r\tau} E\left[\frac{1}{s} e^{-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau-\sigma W(\tau)}\right]$$

$$= e^{-r\tau} + e^{-r\tau}\frac{1}{s}e^{-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\frac{\sigma^2}{2}\tau} = e^{-r\tau}(1 + \frac{1}{S(t)}e^{(\sigma^2-r)\tau}) \leftarrow SVAR$$

3. (Black-Scholes modell) En aktieköpoption av europeisk typ med slutdagen T och lösenpriset K har priset c vid tiden t. Visa att

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-r\tau}\Phi(d_2),\ t < T$$

där

$$d_2 = \frac{\ln\frac{s}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

och $\tau = T - t$.

Lösning. Det gäller att

$$c = s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$$

där $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\tau}$. Alltså är

$$\frac{\partial c}{\partial K} = s\varphi(d_1)(-\frac{1}{K\sigma\sqrt{\tau}}) - e^{-r\tau}\Phi(d_2) - Ke^{-r\tau}\varphi(d_2)(-\frac{1}{K\sigma\sqrt{\tau}})$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(e^{-r\tau}\varphi(d_2) - \frac{s}{K}\varphi(d_1)) - e^{-r\tau}\Phi(d_2)$$

där $\Phi' = \varphi$. Vidare är

$$e^{-r\tau}\varphi(d_2) - \frac{s}{K}\varphi(d_1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-r\tau}e^{-\frac{d_2^2}{2}} - \frac{s}{K}e^{-\frac{(d_2+\sigma\sqrt{\tau})^2}{2}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}(e^{-r\tau} - \frac{s}{K}e^{-\ln\frac{s}{K}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau-\frac{\sigma^2\tau}{2}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}(e^{-r\tau} - \frac{s}{K}\frac{K}{s}e^{-r\tau}) = 0$$

varför

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-r\tau}\Phi(d_2).$$

4. (Dominansprincipen) Visa att det ej är optimalt att lösa in en aktieköpoption av amerikansk typ före slutdagen då aktien ej ger utdelning.

5. Antag $0 < t_1 < ... < t_n$ och att $A_1, ..., A_n$ är delintervall av $\mathbf{R}$. Visa att

$$P\left[W(t_1) \in A_1, ..., W(t_n) \in A_n\right]$$

$$= \int_{A_1} ... \int_{A_n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\prod_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})}} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})}} dx_1 ... dx_n$$

där $t_0 = 0$ och $x_0 = 0$.