2. Binomialmodellen

I förra kapitlet studerades aktiepriser i kontinuerlig tid. Vi skall i detta avsnitt behandla den så kallade binomialmodellen som ger en modell för en kapitalmarknad i diskret tid. Modellen presenterades av Cox, Ross och Rubinstein [CRR] och Rendleman och Bartter [RB] år 1979 och har vid lämpliga val av de ingående parametrarna stor praktisk tillämpning. Tyvärr finns inget omedelbart sätt att illustrera detta utan modellens tillämpbarhet kommer att växa fram efterhand.

Betrakta en matematisk modell för en kapitalmarknad bestående av en aktie med priset $S(t)$ vid tiden t och en obligation med priset $B(t)$ vid tiden t. Här är $B(0)$ och $S(0)$ positiva konstanter. Vi antager att tidsvariabeln t endast kan antaga två värden, nämligen 0 eller 1 och låter

$$B(1) = B(0)e^r$$

där konstanten $r > 0$ och

$$S(1) = S(0)e^X$$

där X är en reellvärd 2-punktsfördelad stokastisk variabel. Det finns alltså $u, d \in \mathbf{R}$, som uppfyller $u > d$, så att sannolikheterna

$$p_u = P[X = u]$$

och

$$p_d = P[X = d]$$

uppfyller

$$p_u + p_d = 1,$$

och

$$p_u > 0,\ p_d > 0.$$

För enkelhets skull antas också att händelsen

$$[X \notin \{u, d\}]$$

aldrig inträffar. Händelsen $[X = u]$ kan uppfattas som att den bakomliggande ekonomin går upp och händelsen $[X = d]$ att motsvarande ekonomi går ned.

Den ovan beskrivna modellen kallas binomialmodellen för en aktie och en obligation med ett tidssteg (eller en period). I ställer för att arbeta med variablerna r och X kan man arbeta med variablerna r_1 och X_1 eller variablerna r_2 och X_2 där

$$e^r = 1 + r_1 = r_2$$

och

$$e^X = 1 + X_1 = X_2.$$

Vi har valt variabler som mest liknar standardvariabler i kontinuerlig tid.

Om $X : \Omega \to \mathbf{R}$ är en funktion betyder olikheten $X \geq 0$ att $X(\omega) \geq 0$ för alla $\omega \in \Omega$ och relationen $X \neq 0$ att $X(\omega) \neq 0$ för något $\omega \in \Omega$. Begreppet arbitrage för binomialmodellen med ett tidssteg kan nu definieras på följande sätt. Välj en godtycklig portfölj $h = (h_S, h_B)$ bestående av h_S aktier och h_B obligationer. Dess värde vid tiden t ges av

$$V_h(t) = h_S S(t) + h_B B(t).$$

Ett arbitrage sägs uppstå om portföljen kan väljas så att

$$V_h(0) = 0,\ P\left[V_h(1) \geq 0\ \right] = 1 \text{ och } E\left[V_h(1)\right] > 0$$

eller ekvivalent

$$V_h(0) = 0,\ V_h(1) \geq 0 \text{ och } V_h(1) \neq 0.$$

Utskrivet mer explicit innebär detta att

$$h_S S(0) + h_B B(0) = 0$$

och

$$\{ . h_S S(0) e^u + h_B B(0) e^r \geq 0 h_S S(0) e^d + h_B B(0) e^r \geq 0$$

där strikt olikhet inträffar i någon av de två olikheterna.

Sats 1. *Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att ett arbitrage skall kunna uppstå i binomialmodellen med ett tidssteg är att*

$$r \notin \,]d, u[\,.$$

Bevis. Antag vi har ett arbitrage så att

$$h_S S(0) + h_B B(0) = 0$$

och

$$\{.h_S S(0)e^u + h_B B(0)e^r \geq 0 h_S S(0)e^d + h_B B(0)e^r \geq 0$$

där strikt olikhet inträffar i någon av de två olikheterna. Eftersom

$$h_B B(0) = -h_S S(0)$$

följer att

$$\{.h_S S(0)(e^u - e^r) \geq 0 h_S S(0)(e^d - e^r) \geq 0$$

där strikt olikhet inträffar i någon av de två olikheterna. Speciellt måste $h_S \neq 0$. Om $h_S > 0$ följer att

$$\{.e^u - e^r \geq 0 \, e^d - e^r \geq 0.$$

Alltså gäller att $r \leq d$ och därmed $r \notin \,]d, u[$. Fallet $h_S < 0$ behandlas på liknande sätt.

Antag nu omvänt att $r \notin \,]d, u[$. Vi betraktar först fallet $r \leq d$. Välj $h_S = 1$ och $h_B < 0$ så att

$$S(0) = (-h_B)B(0).$$

Härav följer att

$$h_S S(0) + h_B B(0) = 0$$

och

$$\{.h_S S(0)e^u + h_B B(0)e^r > 0 h_S S(0)e^d + h_B B(0)e^r \geq 0$$

varför vi har fått ett arbitrage. Fallet $r \geq u$ behandlas analogt.

I den följande diskussionen förutsätts att $u > r > d$ så att modellen saknar arbitrage.

Antag att vår enkla kapitalmarknad utvidgas på så sätt att vi tillför ett aktiederivat av europeisk typ som utbetalar beloppet Y vid tiden $t = 1$. Vi antar att Y är en stokastisk variabel som är känd då $S(1)$ är känd och ansätter därför $Y = g(S(1))$, där $g : \{e^u, e^d\} \to \mathbf{R}$ är en deterministisk funktion.

Genom att definiera $f(x) = g(S(0)e^x)$, $x \in \{u, d\}$, följer att $Y = f(X)$. Vilket teoretiskt värde skall detta derivat tilldelas vid tiden $t = 0$? För att besvara denna fråga betraktar vi en portfölj $h = (h_S, h_B)$ bestående av h_S aktier och h_B obligationer. Om vi kan bestämma h_S och h_B så att $V_h(1) = f(X)$ så definieras derivatets teoretiska värde vid tiden $t = 0$ som $V_h(0)$. Observera att $V_h(0)$ i så fall blir entydigt bestämt eftersom vår modell saknar arbitrage.

Vi undersöker nu närmare ekvationen $V_h(1) = f(X)$. Om aktien går upp vid tiden $t = 1$ blir

$$h_S S(0)e^u + h_B B(0)e^r = f(u)$$

och om aktien går ned vid tiden $t = 1$ så blir

$$h_S S(0)e^d + h_B B(0)e^r = f(d).$$

En kalkyl medför nu att

$$h_S S(0) = \frac{f(u) - f(d)}{e^u - e^d}$$

och

$$h_B B(0) = e^{-r} \frac{e^u f(d) - e^d f(u)}{e^u - e^d}.$$

Storheterna h_S och h_B blir som synes entydigt bestämda och

$$\begin{aligned} V_h(0) &= h_S S(0) + h_B B(0) \\ &= e^{-r} \left[q_u f(u) + q_d f(d) \right] \end{aligned}$$

där

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}$$

och

$$q_d = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}.$$

Notera att $q_u > 0$, $q_d > 0$ och $q_u + q_d = 1$. Vi kallar alltså $V_h(0)$ för derivatets teoretiska pris eller teoretiska värde vid tiden 0 och detta pris betecknas med $\Pi_Y(0)$. Ibland talar man också om derivatets arbitragefria pris. I fortsättningen säger vi ofta pris (värde) istället för teoretiskt pris (teoretiskt värde) då missförstånd inte kan inträffa.

Observera att att $\Pi_Y(0) = S(0)$ om $Y = S(1) = S(0)e^X$ eftersom modellen är arbitragefri. Algebraiskt innebär detta att

$$S(0) = e^{-r}(q_u e^u S(0) + q_d e^d S(0))$$

dvs

$$q_u e^u + q_d e^d = e^r$$

vilket också är lätt att direkt verifiera.

Exempel 1. Betrakta binomialmodellen med ett tidssteg för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > r > d$ och $u > 0 > d$. Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar beloppet

$$Y = \max(0, \frac{S(0) + S(1)}{2} - S(0))$$

vid tiden $t = 1$. Vi vill bestämma derivatets värde vid tiden $t = 0$. Med beteckningen $S(0) = s$ följer att

$$S(1) = se^X$$

och

$$Y = \max(0, \frac{1}{2}(S(1) - S(0)) = s \max(0, \frac{1}{2}(e^X - 1)) = f(X)$$

varför

$$f(u) = \frac{s}{2}(e^u - 1)$$

och

$$f(d) = 0.$$

Alltså är

$$\Pi_Y(0) = e^{-r} q_u \frac{s}{2}(e^u - 1)$$

$$= \frac{se^{-r}}{2}(e^u - 1)\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = \frac{s}{2}(e^u - 1)\frac{1 - e^{d-r}}{e^u - e^d}.$$

Vi är nu beredda att definiera den så kallade binomialmodellen för en aktie och en obligation med T tidssteg (eller T perioder). Betrakta därför en kapitalmarknad bestående av en aktie med priset $S(t)$ vid tiden t och en obligation med priset $B(t)$ vid tiden t, där $S(0)$ och $B(0)$ är positiva konstanter. Tidsvariabeln t antar värdena $0, 1, 2, ..., T$. Vidare gäller att

$$B(t+1) = B(t)e^r$$

där konstanten $r > 0$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X(t+1)}$$

där $X(t+1) = X_{t+1}$ är en 2-punktsfördelad stokastisk variabel för $t = 0, ..., T-1$. Dessutom förutsätts att det går att välja $u, d \in \mathbf{R}$, som uppfyller $u > d$, så att sannolikheterna

$$p_u = P[X_t = u]$$

och

$$p_d = P[X_t = d]$$

är oberoende av t och uppfyller

$$p_u + p_d = 1,$$

och

$$p_u > 0, \ p_d > 0.$$

För enkelhets skull antages också att händelsen

$$[X_t \notin \{u, d\}]$$

aldrig inträffar för godtyckligt $t = 1, ..., T$. Utöver alla dessa förutsättningar antages slutligen att sekvensen $(X_k)_{k=1}^T$ består av stokastiskt oberoende stokastiska variabler. Denna modell kallas för binomialmodellen för en aktie och en obligation med T tidssteg. Händelsen $[X_t = u]$ kan uppfattas som att den bakomliggande ekonomin går upp och händelsen $[X_t = d]$ att ekonomin går ned i tidssteget från $t-1$ till t.

Sätt $X = (X_1, ..., X_T)$. För varje enskilt slumpvis utfall $\omega \in \Omega$ är således $X(\omega)$ ett element i mängden

$$\{u, d\}^T = \{i; \ i = (i_1, ..., i_T) \text{ och } i_t = u \text{ eller } d \text{ för } t = 1, ..., T\}.$$

Denna mängd har 2^T element. Värdemängden för X kan representeras med en matris av typ $2^T \times T$ som vi betecknar med R_T^{ud}. Vi räknar upp elementen i denna matris på följande sätt

$$R_1^{ud} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$R_2^{ud} = \begin{pmatrix} u & u \\ u & d \\ d & u \\ d & d \end{pmatrix}$$

$$R_3^{ud} = \begin{pmatrix} u & u & u \\ u & u & d \\ u & d & u \\ u & d & d \\ d & u & u \\ d & u & d \\ d & d & u \\ d & d & d \end{pmatrix}$$

osv.

Eftersom de stokastiska variablerna $X_1, ..., X_T$ är stokastiskt oberoende gäller att

$$P\left[X_1 = i_1, ..., X_T = i_T\right] = p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_T}$$

om $i_1, ..., i_T = u$ eller d. För en godtycklig funktion $f : \{u, d\}^T \to \mathbf{R}$ så följer nu att

$$E\left[f(X_1, ..., X_T)\right] = \sum_{i_1, ..., i_T = u \text{ eller } d} f(i_1, ..., i_T) P\left[X_1 = i_1, ..., X_T = i_T\right]$$

dvs

$$E\left[f(X_1, ..., X_T)\right] = \sum_{i_1, ..., i_T = u \text{ eller } d} f(i_1, ..., i_T) p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_T}.$$

Nedan möter vi ofta en summa av typen

$$\sum_{i_1, ..., i_T = u \text{ eller } d} f(i_1, ..., i_T) q_{i_1} \cdot ... \cdot q_{i_T}$$

där q_u och q_d är som ovan och vi finner det praktiskt att beteckna denna summa med $E^Q\left[f(X_1,...,X_T)\right]$. Alltså gäller att

$$E^Q\left[f(X_1,...,X_T)\right] = \sum_{i_1,...,i_T=u \text{ eller } d} f(i_1,...,i_T) q_{i_1} \cdot ... \cdot q_{i_T}.$$

Efter denna formalism återvänder vi till aktien ovan. Eftersom

$$S(t) = S(0)e^{X_1+...+X_t}$$

är $S(t)$ en deterministisk funktion av $X_1,...,X_t$ och vi skriver ibland

$$S(t) = S(t; X_1,...,X_t).$$

En sekvens $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ kallas en portföljstrategi (eller endast strategi) om $h(0) = h(1)$ och det för var varje $t = 1,...,T$ gäller att $h(t)$ är en deterministisk funktion av $X_1,...,X_{t-1}$. Ibland skriver vi därför

$$h_S(t) = h_S(t; X_1,...,X_{t-1})$$

och

$$h_B(t) = h_B(t; X_1,...,X_{t-1}).$$

Motsvarande värdeprocess $V_h = (V_h(t))_{t=0}^T$ definieras av att

$$V_h(t) = h_S(t)S(t) + h_B(t)B(t),\ t = 0,1,..,T.$$

Med våra konventioner görs valet av $h_S(t)$ aktier och $h_B(t)$ obligationer vid tiden $t-1$ för $t = 1,...,T$. Portföljvärdet $V_h(t)$ är en deterministisk funktion av $X_1,...,X_t$ varför vi ibland skriver

$$V_h(t) = V_h(t; X_1,...,X_t)$$

för $t = 0,...,T$.

Om en strategi $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ uppfyller

$$V_h(t) = h_S(t+1)S(t) + h_B(t+1)B(t),\ t = 0,1,...,T-1$$

sägs strategin vara vara självfinansierande.

Sats 2. *Antag $u > r > d$. Om $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ är en självfinansierande strategi så gäller att*

$$V_h(0) = e^{-rT} \sum_{i_1,...,i_T = u \text{ eller } d} q_{i_1}...q_{i_T} V_h(T; i_1, ..., i_T)$$

dvs

$$V_h(0) = e^{-rT} E^Q \left[V_h(T; X_1, ..., X_T) \right]$$

eller

$$V_h(0) = e^{-rT} E^Q \left[V_h(T) \right].$$

Bevis. Vi vet att

$$V_h(T) = h_S(T)S(T) + h_B(T)B(T)$$

dvs $V_h(T; X_1, ..., X_T)$ är lika med

$$h_S(T; X_1, ..., X_{T-1})S(T-1; X_1, ..., X_{T-1}))e^{X_T} + h_B(T; X_1, ..., X_{T-1})B(T-1)e^r.$$

Eftersom strategin är självfinansierande gäller att $V_h(T-1; X_1, ..., X_{T-1})$ är lika med

$$h_S(T; X_1, ..., X_{T-1})S(T-1; X_1, ..., X_{T-1}) + h_B(T; X_1, ..., X_{T-1})B(T-1).$$

Från binomialmodellen med ett tidssteg vet vi att storheterna

$$h_S(T; X_1, ..., X_{T-1})$$

och

$$h_B(T; X_1, ..., X_{T-1})$$

är entydigt bestämda och att

$$V_h(T-1; X_1, ..., X_{T-1}) = e^{-r} \sum_{i_T = u \text{ eller } d} q_{i_T} V_h(T; X_1, ..., X_{T-1}, i_T).$$

Resultatet följer nu genom induktion.

En självfinansierande strategi $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ sägs ge ett arbitrage om

$$V_h(0) = 0,\ V_h(T) \geq 0 \text{ och } E\left[V_h(T)\right] > 0$$

eller ekvivalent

$$V_h(0) = 0,\ V_h(T) \geq 0 \text{ och } V_h(T) \neq 0.$$

Sats 3. *Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att ett arbitrage skall kunna uppstå i binomialmodellen med T tidssteg är att*

$$r \notin \left]d, u\right[.$$

Bevis. Antag först att $r \notin \left]d, u\right[$. Enligt sats 1 finns ett arbitrage i tidssteget från 0 till 1. Vid tiden 1 placeras motsvarande portföljvärde i obligationer. Vi får härmed ett arbitrage för binomialmodellen med T tidssteg.

Antag nu att $r \in \left]d, u\right[$ och betrakta en självfinansierande strategi $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ sådan att $V_h(0) = 0$. Sats 2 ger därför att

$$0 = e^{-rT} \sum_{i_1,\dots,i_T = u \text{ eller } d} q_{i_1} \dots q_{i_T} V_h(T; i_1, \dots, i_T)$$

Kom ihåg att $q_u > 0$ och $q_d > 0$. Alltså kan det inte gälla att $V_h(T) \geq 0$ och $V_h(T) \neq 0$. Detta bevisar sats 3.

Ett finansiellt derivat av europeisk typ som som utbetalar beloppet $g(S(T))$ vid tiden T sägs vara ett enkelt derivat av europeisk typ. Det finns dock mer komplicerade aktiederivat där utbetalningen beror av aktiepriserna

$$S(0), S(1), \dots, S(T).$$

Exempelvis är ett kontrakt som ger innehavaren rätten att vid tiden T köpa aktien till den lägsta aktiekursen under tidsperioden $\{0, 1, \dots, T\}$ likvärdigt med ett finansiellt derivat av europeisk typ som utbetalar beloppet

$$S(T) - \min_{t \in \{0,1,\dots,T\}} S(t)$$

vid tiden T ("lookback option"). Ett finansiellt derivat i aktien som utbetalar beloppet Y vid tiden T, där Y är en deterministisk funktion av $X_1, \dots, X_T$, kallas för ett betingat kontrakt av europeisk typ med slutdagen T. Här gäller alltså att $Y = f(X_1, ..., X_T)$ för en lämplig funktion $f : \{u, d\}^T \to \mathbf{R}$. Vi förutsätter att modellen saknar arbitrage dvs att $u > r > d$ och skall definiera ett sådant derivats teoretiska värde $V(t)$ vid tiden $t \leq T$. Här skall naturligtvis $V(t)$ bestämmas som en funktion av $X_1, ..., X_t$.

Vi börjar med att definiera $V(T) = f(X_1, ..., X_T)$. Antag att vi befinner oss vid tiden $t < T$ och att $V(j)$ redan definierats som en deterministisk funktion av $X_1, ..., X_j$ för $j = T, ..., t+1$. För att bestämma $V(t)$ bildas vid tiden t en portfölj bestående av $h_S(t+1)$ aktier och $h_B(t+1)$ obligationer. Dessa kvantiteter skall endast bero på $X_1, ..., X_t$ och ej på framtida utfall för $X_{t+1}, ..., X_T$. Portföljvärdet vid tiden t ges av $h_S(t+1)S(t) + h_B(t+1)B(t)$ och från det föregående vet vi att det finns entydigt $(h_S(t+1),\, h_B(t+1))$ så att

$$h_S(t+1)S(t+1) + h_B(t+1)B(t+1) = V(t+1).$$

Vi definierar därför $V(t) = h_S(t+1)S(t) + h_B(t+1)B(t)$ och skriver

$$V^u(t+1) = V(t+1)_{|X_{t+1}=u}$$

och

$$V^d(t+1) = V(t+1)_{|X_{t+1}=d}.$$

Från vårt inledande studium av binomialmodellen i ett tidssteg följer att

$$h_S(t+1)S(t) = \frac{V^u(t+1) - V^d(t+1)}{e^u - e^d}$$

och

$$h_B(t+1)B(t) = e^{-r}\frac{e^u V^d(t+1) - e^d V^u(t+1)}{e^u - e^d}.$$

Med standardbeteckningarna

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}$$

och

$$q_d = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}$$

så erhålls därför formeln

$$V(t) = e^{-r}\left[q_u V^u(t+1) + q_d V^d(t+1)\right].$$

Det är uppenbart att $V(t), h_S(t+1)$ och $h_B(t+1)$ genom ovanstående definitioner endast beror av $X_1, ..., X_t$. Med hjälp av induktion kan vi till sist definiera $V(0)$. I fortsättningen skrivs ofta $V(t) = \Pi_Y(t)$. Om vi definierar $h(0) = (h_S(0), h_B(0)) = h(1)$ så ger konstruktionen en självfinansierande strategi $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ sådan att

$$V_h(T) = Y.$$

Vi säger att den självfinansierande strategin h replikerar Y. Eftersom varje betingat kontrakt av europeisk typ kan replikeras på detta sätt kallas modellen komplett eller fullständig.

Exempel 2. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > r > 0$, $d = -u$ och $t \in \{0, 1, 2\}$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen 2 utbetalar denna dag beloppet $\max(S(0), S(1), S(2))$. Vi skall bestämma derivatets värde vid tiden 0. Låt därför $S(0) = s$ och kom ihåg att

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}}, \ t = 0, 1.$$

Om $V(t)$ betecknar derivatets värde vid tiden t blir

$$\begin{pmatrix} V(2)_{|X_1=u,X_2=u} = \max(s, se^u, se^{u+u}) = se^{2u} \\ V(2)_{|X_1=u,X_2=d} = \max(s, se^u, se^{u+d}) = se^u \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=u} = \max(s, se^d, se^{d+u}) = s \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=d} = \max(s, se^d, se^{d+d}) = s \end{pmatrix}$$

och det följer att

$$\begin{pmatrix} V(1)_{|X_1=u} = e^{-r}(q_u se^{2u} + q_d se^u) \\ V(1)_{|X_1=d} = e^{-r}(q_u s + q_d s) = e^{-r}s \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$\begin{aligned} V(0) &= e^{-r}\left\{q_u e^{-r}(q_u se^{2u} + q_d se^u) + q_d e^{-r}s\right\} \\ &= se^{-2r}\left\{q_u^2 e^{2u} + q_u q_d e^u + q_d\right\} \end{aligned}$$

där, som vanligt,

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = 1 - q_d.$$

Betrakta återigen ett derivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $Y = f(X_1, ..., X_T)$ vid tiden T och välj en självfinansierande strategi sådan att $V_h(T) = Y$. Sats 2 visar att derivatets värde vid tiden 0 ges av ekvationen

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT} \sum_{i_1,...,i_T = u \text{ eller } d} q_{i_1} \cdot ... \cdot q_{i_T} f(i_1, ..., i_T).$$

Vid beräkning av denna summa kan följande metod användas. Sätt

$$R_T^{10} = (a_{jk})_{1 \le j \le 2^T, 1 \le k \le T} \ .$$

Låt r_j vara rad j för matrisen R_T^{10}, låt

$$b_j = (u - d)r_j + [d \ldots d]$$

och låt n_j vara antalet u i vektorn b_j dvs

$$n_j = \sum_{k=1}^{T} a_{jk}$$

för $j = 1, ..., 2^T$. Då är

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT} \sum_{j=1}^{2^T} q_u^{n_j} q_d^{T-n_j} f(b_j).$$

Serien i höger led innehåller 2^T termer och är därför mycket tidskrävande i samband med beräkning om T är stort. I det viktiga specialfallet då Y är en deterministisk funktion av $S(T)$ kan beräkningen göras mycket snabbare. För att se detta antag att

$$Y = g(S(T)) = g(S(0)\exp(X_1 + ... + X_T)).$$

Vi kan välja ut k element ur T element på

$$\binom{T}{k}$$

olika sätt om vi inte bryr oss om ordningen. Alltså blir

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT} \sum_{k=0}^{T} \binom{T}{k} q_u^k q_d^{T-k} g(S(0)e^{ku+(T-k)d}).$$

Det är i detta fall lätt att se att derivatets pris $\Pi_Y(t)$ vid tiden t är en deterministisk funktion av $S(t)$.

Vid praktisk kalkyl är det ofta fördelaktigt att gå fram rekursivt. Vi skriver därför $\Pi_Y(t) = v(t, S(t))$ och har

$$v(T, S(0)e^{ku+(T-k)d}) = g(S(0)e^{ku+(T-k)d}),\ k = 0, ..., T.$$

Vidare gäller för $t = T-1, ..., 1, 0$ att

$$v(t, S(0)e^{ku+(t-k)d})$$

$$= e^{-r}(q_u v(t+1, S(0)e^{(k+1)u+(t-k)d}) + q_d v(t+1, S(0)e^{ku+(t+1-k)d}))$$

för $k = 0, ..., t$. Det gäller att $\Pi_Y(0) = v(0, S(0))$.

Låt nu $k \in \{0, ..., T\}$ vara fixt. Vi definierar

$$AD_k = \begin{cases} 1 \text{ om } S(T) = k \\ 0 \text{ om } S(T) \neq k \end{cases}$$

och får att

$$\Pi_{AD_k}(0) = e^{-rT} \begin{pmatrix} T \\ k \end{pmatrix} q_u^k q_d^{T-k}.$$

Priserna $\Pi_{AD_k}(0)$, $k = 0, 1, ..., T$, kallas Arrow-Debreus priser. Om vi har ett enkelt derivat med utbetalningen $Y = g(S(1))$ vid tiden T följer nu att

$$\Pi_Y(0) = \sum_{k=0}^{T} \Pi_{AD_k}(0) g(S(0)e^{ku+(T-k)d})$$

(jmfr begreppet Greenfunktion i matematisk fysik).

Vi betraktar avslutningsvis derivat av amerikansk typ och förutsätter även här att $u > r > d$.

Antag att Y_t är en deterministisk funktion av $X_1, ..., X_t$ för $t = 0, 1, ..., T$. Vi antager alltså att

$$Y_t = f_t(X_1, ..., X_t)$$

där

$$f_t : \{u, d\}^t \to \mathbf{R}$$

för $t = 0, 1, ..., T$. Här uppfattas Y_0 som en känd storhet. Ett derivat av amerikansk typ ger kontraktsinnehavaren rättigheten att lösa in kontraktet vid en godtycklig tidpunkt $t \in \{0, 1, ..., T\}$ och det utbetalar i samma ögonblick beloppet Y_t varefter kontraktet upphör att gälla. Vi skall definiera kontraktets teoretiska värde $V(t)$ vid en godtycklig tidpunkt $t \in \{0, 1, ..., T\}$ förutsatt att kontraktet inte lösts in tidigare. Först definieras $V(T) = Y_T$. Om kontraktsinnehavaren bestämmer att ej lösa in kontraktet vid tiden $T-1$ har det samma värde som motsvarande europeiska kontrakt dvs det har värdet

$$e^{-r}(q_u V^u(T) + q_d V^d(T))$$

vid tiden $T-1$. Om kontraktsinnehavaren beslutar lösa in kontraktet vid tiden $T-1$ har det värdet Y_{T-1}vid tiden $T-1$. Vi definierar därför

$$V(T-1) = \max(Y_{T-1}, e^{-r}(q_u V^u(T) + q_d V^d(T)))$$

och allmänt

$$V(t) = \max(Y_t, e^{-r}(q_u V^u(t+1) + q_d V^d(t+1))).$$

I fortsättningen skrivs ofta $\Pi_Y(t) = V(t)$.

Det är naturligtvis återigen tidskrävande att beräkna $V(0)$ om T är stort. Om vi studerar det viktiga specialfall där varje Y_t är en deterministisk funktion av $S(t)$ dvs

$$Y_t = g_t(S(t))$$

så blir beräkningen avsevärt enklare. I detta fall inses att $V(t)$ för fixt t är en funktion av $S(t)$. Vi skriver därför $V(t) = v(t, S(t))$ och har

$$v(T, S(0)e^{ku+(T-k)d}) = g_T(S(0)e^{ku+(T-k)d}),\ k = 0, ..., T.$$

Vidare gäller för $t = T-1, ..., 1, 0$ att storheten

$$v(t, S(0)e^{ku+(t-k)d})$$

är lika med

$$\max(g_t(S(0)e^{ku+(t-k)d}), e^{-r}(q_u v(t+1, S(0)e^{(k+1)u+(t-k)d}) + q_d v(t+1, S(0)e^{ku+(t+1-k)d}))$$

för $k = 0, ..., t$. Det sökta optionsvärdet ges alltså av $v(0, S(0))$.

Räntemarknaden kan också beskrivas med olika tidsdiskreta modeller snarlika binomialmodellen. Av utrymmesskäl kan vi inte gå in på dessa teorier här utan hänvisar den intresserade läsaren till Jarrows bok [J1].

Övningar

1. Betrakta binomialmodellen med ett tidssteg där $u > r > d$ och $r > 0$. Ett derivat av europeisk typ har utbetalningsfunktionen

$$g(s) = \max(0, s - K)$$

där

$$S(0)e^d < K < S(0)e^u.$$

Antag

$$h_S S(1) + h_B B(1) = g(S(1)).$$

Visa att

$$h_S > 0 \text{ och } h_B < 0.$$

2. (Δ-hedging) Betrakta binomialmodellen med ett tidssteg där $u > r > d$ och $r > 0$. Priset för ett europeiskt derivat med utbetalningen $Y = f(X)$ vid tiden 1 kan motiveras på följande sätt. Välj en portfölj $\mathcal{D}$ bestående av ett derivat och $-\Delta$ aktier, där Δ väljs så att $V_{\mathcal{D}}(1)$ blir förutsägbar vid tiden 0. a) Visa att

$$\Delta = \frac{f(u) - f(d)}{S(0)(e^u - e^d)}.$$

b) Visa att arbitragefrihet och fullständighet medför att

$$V_{\mathcal{D}}(1) = V_{\mathcal{D}}(0)e^r$$

och dra slutsatsen att derivatets värde vid tiden 0 måste ges av uttrycket

$$e^{-r}(q_u f(u) + q_d f(d))$$

där

$$q_u = 1 - q_d = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}.$$

3. Antag att X är en 2-punktsfördelad stokastisk variabel sådan att

$$P[X = -1] = P[X = 1] = \frac{1}{2}.$$

Bestäm de $\lambda \in \mathbf{R}$ för vilka olikheten

$$E\left[(a + \lambda bX)^4\right] \le \left(E\left[(a + bX)^2\right]\right)^2$$

gäller för alla a, $b \in \mathbf{R}$.

4. Låt $x \in [0,1]$ och antag $P[X=1] = x$ och $P[X=0] = 1-x$. Antag $X_1, ..., X_n$ är stokastiskt oberoende observationer på X. Visa att

$$E\left[f(\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n))\right] = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

för varje funktion f definierad på intervallet $[0,1]$.

5. Betrakta binomialmodellen med $t = 0, 1, 2$ och $u > r > d$ och $r > 0$. Ett derivat av europeisk typ utbetalar beloppet

$$Y = \max(0, (S(0)S(1)S(2))^{\frac{1}{3}} - K)$$

vid tiden $t = 2$. Antag

$$S(0)e^d < K \leq S(0)e^{\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}d}.$$

Visa att derivatets värde vid tiden $t = 0$ är lika med

$$e^{-2r}\left[S(0)q_u^2 e^u + S(0)q_u q_d(e^{\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}d} + e^{\frac{1}{3}u+\frac{2}{3}d}) - q_u(1+q_d)K\right]$$

där

$$q_u = 1 - q_d = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}.$$

6. Betrakta binomialmodellen och antag $u > r > d$, $r > 0$ och $T = 2$. En europeisk medelvärdesoption av europeisk typ utbetalar beloppet

$$\max\left(0, \frac{1}{3}(S(0) + S(1) + S(2)) - K\right)$$

vid tiden 2, där K är ett givet positivt tal som uppfyller

$$\frac{S(0)}{3}(1 + e^d + e^{2d}) < K < \frac{S(0)}{3}(1 + e^d + e^{u+d}).$$

Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

7. Skriv ett program i MATLAB som genererar matrisen R_T^{10}.

8. Ett betingat kontrakt av europeisk typ utbetalar

$$Y = S(T) - \min_{t \in \{0,1,...,T\}} S(t)$$

vid tiden T. Beräkna optionens värde vid tiden 0 då

a) $u = -d = 0.1$, $r = 0.05$ och $T = 2$

b) $u = -d = 0.1$, $r = 0.05$ och $T = 8$.

9. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > r > 0 \geq d$ och $t \in \{0, 1, ..., n\}$. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen n utbetalar denna dag beloppet Y, där $Y = S(n)$ om $S(0) < S(1) < ... < S(n)$ och $Y = S(0)$ i annat fall. Bestäm derivatets värde vid tiden 0. (**Svar:** $e^{-rn}\left\{1 + \left(\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}\right)^n (e^{nu} - 1)\right\} S(0)$)

10. (Binomialmodellen) Låt $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^{t=T}$ vara portföljstrategi. Sätt $G(0) = 0$ och

$$\begin{aligned} G(t) &= h_S(1)(S(1) - S(0)) + ... + h_S(t)(S(t) - S(t-1) \\ &\quad + h_B(1)(B(1) - B(0)) + ... + h_B(t)(B(t) - B(t-1)) \end{aligned}$$

för $t = 1, ..., T$. Visa att h är självfinansierande om och endast om

$$V_h(t) = V_h(0) + G(t), \ t = 0, ..., T.$$

11. Betrakta binomialmodellen med ett tidssteg och en portfölj $h = (h_S, h_B)$ bestående av h_S aktier och h_B obligationer. Dess värde vid tiden t ges av

$$V_h(t) = h_S S(t) + h_B B(t).$$

Vi säger att ett säkert arbitrage uppstår om portföljen kan väljas så att

$$V_h(0) = 0 \text{ och } V_h(1) > 0.$$

Visa att ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att ett säkert arbitrage skall kunna uppstå är att

$$r \notin [d, u].$$

(Om $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ betyder olikheten $x > 0$ att $x_k > 0$ för $k = 1, ..., n$.)

12. Betrakta binomialmodellen med T tidssteg. En självfinansierande strategi $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^{T}$ sägs ge ett säkert arbitrage om

$$V_h(0) = 0 \text{ och } V_h(T) > 0.$$

Visa att ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att ett säkert arbitrage skall kunna uppstå är att

$$r \notin [d, u] .$$

13. Antag $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ är en i.i.d. sådan att $P[X_n = 1] = P[X_n = -1] = \frac{1}{2}$ och sätt $Z_0 = 0$ och $Z_n = X_1 + ... + X_n$, $n \in \mathbf{N}_+$. Låt $A, -B \in \mathbf{N}$ vara heltal sådana att $A + B \geq 2$ och låt τ vara det minsta talet i mängden $\{m \in \mathbf{N};\ Z_m \in \{A, -B\}\}$ om denna mängd är icke-tom. I annat fall sätts $\tau = \infty$.

a) Fixera $k \in \mathbf{N}$ och låt A_k vara händelsen

$$[X_n = 1 \text{ för alla } n \in \{k(A+B), ..., (k+1)(A+B) - 1\}] .$$

Beräkna $P[A_k]$. Visa också att

$$[\tau \geq n(A+B)] \subseteq \bigcap_{k=0}^{n-1} [A_k \text{ inträffar ej}] \text{ om } n \geq 1.$$

b) Visa att

$$P[\tau < \infty] = 1.$$

c) Visa att $E[\tau] = AB$. Ledning: Skriv $\tau = \tau(A, -B)$ och

$$g(k) = E[\tau(A-k, -B-k)] , -B \leq k \leq A.$$

Utnyttja att $g(A) = g(-B) = 0$ och

$$g(k) = 1 + \frac{1}{2}g(k-1) + \frac{1}{2}g(k+1), \quad -B < k < A.$$

d) Låt σ vara det minsta talet i mängden $\{m \in \mathbf{N};\ Z_m = 1\}$ om denna mängd är icke-tom. I annat fall sätts $\sigma = \infty$. Visa att

$$E[\sigma] = \infty.$$

e) Visa att $P\left[Z_{\tau(A,-B)} = A\right] = \frac{B}{A+B}$ och dra slutsatsen att $P[\sigma < \infty] = 1$. Ledning: Sätt $f(k) = P\left[Z_{\tau(A-k,-B-k)} = A - k\right]$, $-B \leq k \leq A$, och resonera som i c).