4 Black-Scholes differentialekvation

I Black-Scholes kapitalmarknadsmodell finns en aktie och en obligation. Aktiepriset $S(t)$, $t \geq 0$, beskrivs på samma sätt som i Bachelier-Samuelsons modell dvs av en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift. Vidare förutsätts att obligationen har priset $B(t) = B(0)e^{rt}$ vid tiden t, där $B(0)$ och r är positiva konstanter.

I detta kapitel skall vi arbeta i Black-Scholes modell och försöka prissätta ett enkelt derivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $g(S(T))$ vid tiden $T \in]0, \infty[$. Här gäller att funktionen $g(e^x) \in \mathcal{E}$ dvs g är styckvis kontinuerlig och det existerar ett $A > 0$ så att

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} (e^{-A|x|} \mid g(e^x) \mid) < \infty$$

vilket i kompakt form uttrycks $g \in \mathcal{P}$ (jmfr engelskans "payoff function"). Det är här praktiskt att tillåta utbetalningsfunktioner som eventuellt kan antaga negativa värden (jmfr kapitel 1 och värdering av terminskontrakt).

Vi antar alltså att aktiepriset ges av ekvationen

$$S(t) = S(0)e^{\alpha t + \sigma W(t)}, \ t \geq 0$$

där $\alpha \in \mathbf{R}$ och $\sigma > 0$ är konstanter och $(W(t))_{t \geq 0}$ som vanligt betecknar en normaliserad Wienerprocess med kontinuerliga trajektorier. Fr o m nu betecknar t dagens datum och i den följande diskussionen förutsätts att $t < T$. Vi kan skriva

$$S(\lambda) = S(t)e^{\alpha(\lambda - t) + \sigma(W(\lambda) - W(t))}, \ t \leq \lambda \leq T.$$

Sätt $\tau = T - t$. Eftersom processerna

$$(W(\lambda) - W(t))_{t \leq \lambda \leq T}$$

och

$$(\sqrt{\tau} W(\frac{\lambda - t}{\tau}))_{t \leq \lambda \leq T}$$

är ekvivalenta i fördelning kan det antas att

$$S(\lambda) = S(t)e^{\alpha(\lambda - t) + \sigma\sqrt{\tau} W(\frac{\lambda - t}{\tau})}, \ t \leq \lambda \leq T.$$

Vi väljer nu först ett $N \in \mathbf{N}_+$ och definierar $h = \tau/N$ och

$$t_n = t + nh,\ n = 0, 1, ..., N.$$

I nästa steg approximeras processen

$$(\sqrt{\tau} W(\frac{\lambda - t}{\tau}))_{t \leq \lambda \leq T}$$

med processen

$$(\sqrt{\tau} W_N(\frac{\lambda - t}{\tau}))_{t \leq \lambda \leq T}$$

där W_N definieras i kapitel 3. Det gäller att processen $(W_N(\lambda))_{\lambda \geq 0}$ har kontinuerliga samplefunktioner, som är affina i varje intervall $\left[\frac{n}{N}, \frac{n+1}{N}\right]$, $n = 0, 1, 2, ...$, samt

$$W_N(\frac{n}{N}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

där följden $(X_k)_{k=1}^{N}$ är en i.i.d. och

$$P\left[X_1 = 1\right] = P\left[X_1 = -1\right] = \frac{1}{2}.$$

Härigenom får vi ett approximativt aktiepris

$$S_N(\lambda) = S(t) e^{\alpha(\lambda - t) + \sigma\sqrt{\tau} W_N(\frac{\lambda - t}{\tau})},\ t \leq \lambda \leq T.$$

Observera att processen

$$(\alpha(\lambda - t) + \sqrt{\tau} W_N(\frac{\lambda - t}{\tau}))_{t \leq \lambda \leq T}$$

är affin i varje intervall av typen

$$\left[t_n, t_{n+1}\right],\ n = 0, ..., N - 1$$

och att

$$S_N(t_n) = S(t) e^{\alpha n h + \sigma\sqrt{h} \sum_{k=1}^{n} X_k},\ n = 0, 1, ..., N$$

(vi följer här konventionen att en summa med mindre övre summationsindex än undre är lika med noll).

Vi skall i nästa steg försöka motivera ett rimligt teoretiskt värde för derivatet ovan. Resonemanget bygger bl a på följande förutsättningar:

(a) derivathandel förekommer endast vid tidpunkterna $t, t_1, ..., t_{N-1}, T$

(b) lämplig regularitet för approximerande optionspriser.

Sätt

$$\tilde{S}(n) = S_N(t_n)$$

så att

$$\tilde{S}(n+1) = \tilde{S}(n)e^{\alpha h + \sigma\sqrt{h}X_{n+1}}.$$

Vi definierar också

$$\tilde{B}(n) = B(t_n)$$

så att

$$\tilde{B}(n+1) = \tilde{B}(n)e^{rh}.$$

Med dessa beteckningar som bakgrund betraktas en fiktiv tidsdiskret kapitalmarknad bestående av en aktie med priset $\tilde{S}(n)$ vid tiden n, en obligation med priset $\tilde{B}(n)$ vid tiden n och ett derivat i aktien som utbetalar beloppet $g(\tilde{S}(N))$ vid tiden N. Vi är alltså tillbaka i binomialmodellen. Här gäller att tidsvariabeln $n \in \{0, 1, ..., N\}$,

$$u = \alpha h + \sigma\sqrt{h}$$

och

$$d = \alpha h - \sigma\sqrt{h}.$$

Antag vidare fr o m nu att N är så stort att

$$\alpha h + \sigma\sqrt{h} > rh > \alpha h - \sigma\sqrt{h}$$

så att modellen saknar arbitrage. Låt $V(n)$ beteckna derivatets teoretiska värde vid tiden n och definiera

$$V^u(n+1) = V(n+1)_{|X_{n+1}=+1}$$

och

$$V^d(n+1) = V(n+1)_{|X_{n+1}=-1}.$$

Binomialmodellen ger rekurrensekvationen

$$V(n) = e^{-rh}(q_u V^u(n+1) + q_d V^d(n+1))$$

där

$$q_u = \frac{e^{rh} - e^{\alpha h - \sigma\sqrt{h}}}{e^{\alpha h + \sigma\sqrt{h}} - e^{\alpha h - \sigma\sqrt{h}}}$$

och $q_d = 1 - q_u$. Eftersom vårt finansiella derivat är av enkel typ visar resultaten i kapitel 2 att $V(n)$ är en deterministisk funktion av n och $\tilde{S}(n)$ så vi kan skriva

$$V(n) = v(t + nh, \tilde{S}(n)).$$

Observera här att $V = V_N$ och $v = v_N$. Subindexet N utesluts ofta i det följande.

Vi går nu vidare och inför beteckningen $s = \tilde{S}(0) = S(0)$. Sätts $n = 0$ i rekurrensekvationen ovan får vi likheten

$$v(t,s)e^{rh} = q_u v(t+h, se^{\alpha h + \sigma\sqrt{h}}) + q_d v(t+h, se^{\alpha h - \sigma\sqrt{h}}).$$

Vidare gäller att

$$q_u = \frac{e^{(r-\alpha)h} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1 + (r-\alpha)h - 1 + \sigma\sqrt{h} - \frac{1}{2}\sigma^2 h + o(h)}{\sigma\sqrt{h} + o(h)},\ h \to 0$$

och efter förenkling erhålls

$$q_u = \frac{1}{2}\frac{1 + (r - \alpha - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\sqrt{h}}{\sigma} + o(\sqrt{h})}{1 + o(\sqrt{h})}$$

$$= \frac{1}{2} + (r - \alpha - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\sqrt{h}}{2\sigma} + o(\sqrt{h}),\ h \to 0$$

(skrivsättet $f(h) = o(g(h))$, $h \to 0$, betyder att $f(h)/g(h) \to 0$ då $h \to 0$). Alltså är

$$q_d = \frac{1}{2} - (r - \alpha - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\sqrt{h}}{2\sigma} + o(\sqrt{h}),\ h \to 0.$$

Funktionen $v = v_N$ har en ändlig definitionsmängd och beror av $N \in \mathbf{N}_+$. Vi antar nu att denna funktions definitionsområde kan utvidgas till området $[t, T[\times \mathbf{R}$ så att utvidgningen blir en gång kontinuerligt deriverbar i första variabeln (som betecknas med t) och två gånger kontinuerligt deriverbar i andra variabeln (som betecknas med s) och så att denna funktions beroende av N kan försummas för stora N. Detta medför att

$$v(t+h, se^{\alpha h+\sigma\sqrt{h}}) = v(t,s) + \frac{\partial v}{\partial t}(t,s)h + \frac{\partial v}{\partial s}(t,s)s(e^{\alpha h+\sigma\sqrt{h}}-1)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2(e^{\alpha h+\sigma\sqrt{h}}-1)^2 + o(h),\ h\to 0.$$

Alltså gäller att

$$v(t+h, se^{\alpha h+\sigma\sqrt{h}}) = v(t,s) + \frac{\partial v}{\partial t}(t,s)h + \frac{\partial v}{\partial s}(t,s)s((\alpha+\frac{\sigma^2}{2})h+\sigma\sqrt{h})$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2\sigma^2 h + o(h),\ h\to 0.$$

På liknande sätt fås

$$v(t+h, se^{\alpha h-\sigma\sqrt{h}}) = v(t,s) + \frac{\partial v}{\partial t}(t,s)h + \frac{\partial v}{\partial s}(t,s)s((\alpha+\frac{\sigma^2}{2})h-\sigma\sqrt{h})$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2\sigma^2 h + o(h),\ h\to 0.$$

Vi utnyttjar nu att

$$e^{rh} = 1 + rh + o(h),\ h\to 0$$

och insättning i ekvationen

$$v(t,s)e^{rh} = q_u v(t+h, se^{\alpha h+\sigma\sqrt{h}}) + q_d v(t+h, se^{\alpha h-\sigma\sqrt{h}})$$

ger

$$v(t,s)(1+rh) + o(h)$$

$$= q_u\left\{v(t,s) + \frac{\partial v}{\partial t}(t,s)h + \frac{\partial v}{\partial s}(t,s)s((\alpha+\frac{\sigma^2}{2})h+\sigma\sqrt{h}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2\sigma^2 h\right\}$$

$$+q_d\left\{v(t,s) + \frac{\partial v}{\partial t}(t,s)h + \frac{\partial v}{\partial s}(t,s)s((\alpha+\frac{\sigma^2}{2})h-\sigma\sqrt{h}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2\sigma^2 h\right\}$$

då $h\to 0$. Efter förenkling erhålls

$$v(t,s)rh + o(h) =$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s)h + \frac{\partial v}{\partial s}(t,s)s((\alpha+\frac{\sigma^2}{2})h + (q_u-q_d)\sigma\sqrt{h}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2\sigma^2 h$$

då $h \to 0$. Vidare gäller att

$$(\alpha + \frac{\sigma^2}{2})h + (q_u - q_d)\sigma\sqrt{h} = (\alpha + \frac{\sigma^2}{2})h + 2(r - \alpha - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\sqrt{h}}{2\sigma}\sigma\sqrt{h} + o(h)$$

$$= rh + o(h),\ \ h \to 0$$

(parametern α försvinner!) och det följer att

$$v(t,s)r = \frac{\partial v}{\partial t}(t,s) + \frac{\partial v}{\partial s}(t,s)sr + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2\sigma^2.$$

Denna partiella differentialekvation, som kommer fram i Blacks och Scholes publikation [BS] från 1973, kallas Black-Scholes differentialekvation och brukar skrivas

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s) + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s) + rs\frac{\partial v}{\partial s}(t,s) - rv(t,s) = 0,\ 0 \le t < T$$

(se också Mertons publikation [$MER2$]). Vårt ursprungliga derivat uppfyller också slutvillkoret

$$v(T,s) = g(s).$$

I sats 5, kapitel 3, kom vi fram till att denna ekvation har lösningen

$$v(t,s) = e^{-r\tau}E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})\right]$$

där $\tau = T - t$. Det ursprungliga derivatets teoretiska värde vid tiden t definieras därför lika med $v(t, S(t))$. Detta pris kallas för Black-Scholes pris för det aktiella derivatet. Det kan påpekas ytterligare en gång att detta pris inte beror på log-prisets driftskoefficient α. Black-Scholes prisformel gäller även för $t = T$ då $\tau = 0$.

Vi sammanfattar ovanstående i följande viktiga definition.

Definition 1. *Antag $g \in \mathcal{P}$. Ett enkelt derivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $Y = g(S(T))$ slutdagen T har det teoretiska värdet $\Pi_Y(t) = v(t, S(t))$ vid tiden t, där*

$$v(t,s) = e^{-r\tau}E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})\right]$$

och $\tau = T - t$.

Sätts

$$M_\sigma(\tau) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma W(\tau)}$$

för $\sigma > 0$ och $\tau \geq 0$ så följer att funktionen $v(t,s)$ i definition 1 ges av

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{r\tau} M_\sigma(\tau))\right].$$

Om vi går tillbaka till härledningen av Black-Scholes differentialekvation och följer funktionerna h_S och h_B i den diskreta modellen till gräns ($N \to \infty$) så får vi med samma beteckning för gränsvärdena att

$$h_S(t) = \frac{\partial v}{\partial s}(t, S(t))$$

och

$$v(t, S(t)) = h_S(t)S(t) + h_B(t)B(t).$$

Högra ledet kan tolkas som ett innehav i aktien och obligationen som i varje tidpunkt har samma värde som optionen. Portföljstrategin kräver en initial investering men borde i övrigt vara ”självfinansierande” eftersom den approximerande tidsdiskreta portföljstrategin är självfinansierande. Att reda upp motsvarande definitioner ordentligt i kontinuerlig tid kräver stokastisk kalkyl och faller utom ramen för denna kurs. Om $v(t, S(t)) \neq 0$ kan ekvationen

$$1 = \frac{h_S(t)}{v(t,S(t))}S(t) + \frac{h_B(t)}{v(t,S(t))}B(t)$$

tolkas som en relativ portfölj i aktien och obligationen. Om $S(t) = s$ så är det relativa aktievärdet lika med

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial s}}{v}\, s = \frac{\frac{\partial v}{v}}{\frac{\partial s}{s}} \qquad \text{(symboliskt)}.$$

Detta uttryck brukar kallas optionsprisets elasticitet med avseensde på aktiepriset.

Antag $g_i \in \mathcal{P}$, $i = 1, ..., m$, och låt a_i, $i = 1, ..., m$, vara fixa reella tal. Om

$$\sum_{i=1}^{m} a_i g_i(e^x) \geq 0, \text{ alla } x \in \mathbf{R}$$

så följer att

$$V_{\mathcal{A}}(t) = e^{-r\tau} E\left[\sum_{i=1}^{m} a_i g_i(se^{r\tau} M_\sigma(\tau))\right] \geq 0.$$

Notera att detta medför att

$$p(t, s, K; T) = Ke^{-r\tau} - s + c(t, s, K; T).$$

.

Sats 1. *En europeisk köpoption med slutdagen T och lösenpriset K har värdet $c(t, S(t), K)$ vid tiden $t < T$ där*

$$c(t, s, K) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{s}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

och

$$d_2 = \frac{\ln\frac{s}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

En europeisk säljoption med slutdagen T och lösenpriset K har värdet $p(t, S(t), K)$ vid tiden $t < T$ där

$$p(t, s, K) = Ke^{-r\tau}\Phi(-d_2) - s\Phi(-d_1).$$

Antag A är ett delintervall av reella tallinjen och definiera

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

I beviset för sats 1 utnyttjar vi skrivsättet

$$E\left[f(X); X \in A\right] = E\left[f(X) 1_A(X)\right]$$

där X är en rellvärd stokastisk variabel och $f : \mathbf{R} \to [0, \infty[$ är kontinuerlig.

Bevis av sats 1. Definition 1 ger att

$$c(t,s,K) = e^{-r\tau} E\left[\max(0, se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma\sqrt{\tau}G} - K)\right]$$

där G är en $N(0;1)$-fördelad stokastisk variabel (kom ihåg att G och $-G$ har samma fördelning). Härav följer att

$$c(t,s,K) = e^{-r\tau} E\left[se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma\sqrt{\tau}G} - K;\ G \le \frac{\ln\frac{s}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]$$

och därmed är

$$c(t,s,K) = e^{-r\tau}\left\{E\left[se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma\sqrt{\tau}G};\ G \le d_2\right] - K\Phi(d_2)\right\}.$$

Vidare är

$$e^{-r\tau} E\left[se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma\sqrt{\tau}G};\ G \le d_2\right] = s\int_{x\le d_2} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau - \sigma\sqrt{\tau}x - \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

där högra ledet är lika med

$$s\int_{x\le d_2} e^{-\frac{(\sigma\sqrt{\tau}+x)^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = s\Phi(\sigma\sqrt{\tau} + d_2) = s\Phi(d_1).$$

Säljoptionens värde kan härledas på liknande sätt. Alternativt kan vi utnyttja att

$$p(t,s,K) = Ke^{-r\tau} - s + c(t,s,K)$$

och här sätta in Black-Scholes köpoptionspris. Det avslutar beviset för sats 1.

Sats 1 kan även användas för vissa valutaberoende finansiella derivat. Som ett exempel antar vi att dollarkusen i kr är lika med $\xi(t)$ vid tiden t och betraktar rättigheten, men ej skyldigheten, att få köpa en dollar för K kr vid tiden T. Vi möter alltså här ett kontrakt av europeisk typ med utbetalningen

$$Y = \max(0, \xi(T) - K)$$

vid tiden T. En dollar skiljer sig mycket från en aktie. T ex är ett dollarlån ej gratis ens på en friktionsfri marknad. Trots detta kan det aktuella kontraktet värderas med hjälp av sats 1. Om vi antar att den amerikanska marknaden erbjuder en obligation med priset $B_a(t) = B_a(0)e^{r_a t}$ vid tiden t, där räntan r_a är en positiv konstant, så kan vi uppfatta

$$S(t) = B_a(t)\xi(t),\ t \geq 0$$

som prisprocessen för ett svenskt värdepapper (med historiska veckonoteringar för dollarkursen under de senaste 12 åren skattar vi volatiliteten för dollarkursen i kr till ungefär 10.4% per år). Vi kan nu skriva

$$Y = B_a(T)^{-1} \max(0, S(T) - B_a(T)K)$$

och får att optionens värde $v(t)$ vid tiden $t < T$ ges av

$$\begin{aligned} v(t) &= B_a(T)^{-1} c(t, S(t), B_a(T)K); T) \\ &= B_a(T)^{-1} \left(B_a(t)\xi(t)\Phi(D_1) - B_a(T)Ke^{-r\tau}\Phi(D_2) \right) \end{aligned}$$

där $\tau = T - t$,

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\ln \frac{B_a(t)\xi(t)}{B_a(T)K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\ln \frac{\xi(t)}{K} + (r - r_a + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \end{aligned}$$

och

$$D_2 = \frac{\ln \frac{\xi(t)}{K} + (r - r_a - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Efter någon förenkling följer att

$$v(t) = \xi(t)e^{-r_a\tau}\Phi(D_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(D_2)$$

(se Garman och Kohlhagen [GK]). Optionen att få sälja en dollar för K kr vid tiden T kan behandlas på liknande sätt. Optionen att få köpa en IBM-aktie till ett föreskrivet belopp i kr ett givet framtida datum kan inte behandlas lika enkelt. Detta derivat beror på två bruskällor, en från valutakursen och en från aktien och behandlas i kapitel 5.

Sats 1 kan även användas för att värdera köpoptioner på terminskontrakt. Antag $t < T < T_1$ och betrakta ett finansiellt derivat som vid tiden T dels ger innehavaren ett nytecknat terminskontrakt i aktien med leverans vid tiden T_1, dels ett belopp av storleken

$$Y = \max(0, S_{term}^{T_1}(T) - K).$$

Kom ihåg att ett terminskontrakt är värdelöst vid tecknandet och att

$$Y = e^{r(T_1-T)} \max(0, S(T) - Ke^{-r(T_1-T)}).$$

Det aktuella kontraktet har därför vid tiden $t < T$ värdet

$$e^{r(T_1-T)} c(t, S(t), Ke^{-r(T_1-T)}; T)$$

$$= e^{r(T_1-T)} \left\{ S(t)\Phi(\frac{\ln \frac{S(t)}{Ke^{-r(T_1-T)}} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}) \right.$$

$$\left. -Ke^{-r(T_1-T)}e^{-r(T-t)}\Phi(\frac{\ln \frac{S(t)}{Ke^{-r(T_1-T)}} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}) \right\}$$

$$= e^{-r(T-t)} \left\{ S_{term}^{T_1}(t)\Phi(\frac{\ln \frac{S_{term}^{T_1}(t)}{K} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}) - K\Phi(\frac{\ln \frac{S_{term}^{T_1}(t)}{K} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}) \right\}.$$

Detta uttryck kallas ”Black-76 formel” $[B]$.

Överensstämmer Black-Scholes optionspris med marknadens priser? Låt oss betrakta en given köpoption. En kalkyl visar att

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = s\Phi'(d_1)\sqrt{\tau} = se^{-d_1^2/2}\sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} > 0.$$

Vidare gäller att

$$\lim_{\sigma \to 0+} c(t, s, K) = \max(0, s - Ke^{-r\tau})$$

och

$$\lim_{\sigma \to \infty} c(t, s, K) = s.$$

Om $t < T$, $s = S(t)$ och

$$\max(0, s - Ke^{-r\tau}) < \text{optionens marknadspris vid tiden } t < s$$

(vilket är högst sannolikt) så kan därför σ skattas så att det teoretiska optionspriset är lika med marknadspriset vid tiden t. Denna skattning av standardavvikelsen kallas för den implicita standardavvikelsen för aktiepriset (relativt den givna köpoptionen). Den implicita standardavvikelsen är typiskt en icke-konstant funktion av tiden och uppvisar likheter med en stokastisk process. Som funktion av lösenpriset är den implicita standardavvikelsen för fixt t ofta en konvexliknande funktion med ett minimum nära aktiepriset ("volatility with a smile"). Dessa fenomen är inte konsistenta med Black-Scholes teori. En del forskare inom optionsområdet har hävdat att avvikelserna mellan teoretiska priser och marknadspriser i regel är små och försumbara. Efter det stora börsraset 1987 har emellertid avvikelserna blivit tydligare. Det finns idag teorier som postulerar olika typer av stokastisk voltilitet för att få en bättre överensstämmelse mellan teoretiska optionspriser och marknadspriser. För ett spännande bidrag inom detta område hänvisas till Fouques, Papanicolaous och Sircars bok "Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility" [FPS].

Det är naturligt i en sådan här framställning att säga åtminstone något om amerikanska kontrakt i kontinuerlig tid fastän ämnet kräver mycket mer matematik än vi kan förutsätta här för att bli ordentligt belyst. Resultaten i kapitel 1 visar att amerikanska köpoptioner utan utdelning i den bakomliggande aktien värderas som motsvarande europeiska kontrakt. För den amerikanska säljoptionen finns idag ingen känd analytiskt given prisformel. Om $v(t, S(t))$ betecknar värdet vid tiden t för en amerikansk säljoption med lösenpriset K och slutdagen T så gäller att v uppfyller Black-Scholes differentialekvation i ett från början okänt område av typen

$$D = \{(t, s);\ s > b(t),\ 0 \leq t < T\}$$

där b är en växande, kontinuerligt deriverbar funktion sådan att

$$\lim_{t \to T-} b(t) = K.$$

Som vanligt, då ej annat sägs, antags att aktien inte ger någon utdelning under optionens löptid. Vidare gäller att

$$\begin{aligned} v(t, s) &> \max(K - s, 0),\ (t, s) \in D, \\ v(t, s) &= \max(K - s, 0),\ (t, s) \in \partial D \end{aligned}$$

och

$$\frac{dv}{ds}(t, b(t)+) = -1,\ 0 \leq t < T.$$

Det är optimalt att lösa in optionen om $S(t) < b(t)$. Den kritiska randen $s = b(t)$ beskrivs ej heller av något känt analytiskt uttryck. Det finns explicita prisformler för den amerikanska säljoptionen i termer av den kritiska randen $[CJM]$. Om $T \to +\infty$ får optionen oändlig löptid (”perpetual option”). Låt $v = v(s)$ vara värdet för rättigheten, men ej skyldigheten, att sälja aktien till priset K vid varje tidpunkt i framtiden. Då gäller att

$$\frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{d^2v}{ds^2} + rs\frac{dv}{ds} - rv = 0,\ \ s > b$$

där den kritiska randen $s = b$ är oberoende av tiden t. Denna Eulerekvation har de linjärt oberoende lösningarna $v = s$ och $v = s^{-\gamma}$ där

$$\gamma = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

Den första lösningen är ej begränsad då $s \to \infty$ och saknar intresse här. Antag därför $v = As^{-\gamma}$. Om $s = b$ gäller att

$$v(s) = K - s$$

och

$$\frac{dv}{ds}(s) = -1$$

varför

$$s = b = \frac{\gamma K}{1+\gamma}$$

och

$$A = b^\gamma (K - b) = \frac{b^\gamma K}{1+\gamma}.$$

Härav följer att

$$v(s) = \frac{K}{1+\gamma}\left(\frac{b}{s}\right)^\gamma,\ s > b.$$

För mer information om den amerikanska säljoptionen hänvisas till $[CJM]$, $[MY]$ och $[WDH]$.

Enkla europeiska kontrakt är ganska lätta att behandla numeriskt. Betrakta först ett enkelt derivat av europeisk typ med utbetalningsfunktionen g. Vi kan bestämma dess teoretiska värde exakt med hjälp av sats 1 och någon numerisk metod för beräkning av integraler i en dimension. Vi kan också bestämma optionens approximativa värde $v(t, S(t))$ vid tiden t med den binomialapproximation som ledde till definitionen av Black-Scholes optionspris. Med beteckningar som ovan erhålls först att

$$v(t_N, se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}) = g(se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}),\ j = 0, 1, ..., N$$

och sedan successivt för $n = N-1, N-2, ..., 1, 0$, att

$$v(t_n, se^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}}) = e^{-rh}(q_u v(t_{n+1}, se^{(n+1-2j)\sigma\sqrt{h}}) + q_d v(t_{n+1}, se^{(n-1-2j)\sigma\sqrt{h}}))$$

för $j = 0, 1, ..., n$ där

$$q_u = \frac{e^{rh} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

och $q_d = 1 - q_u$. Vi har alltså valt driftskoefficienten α för log-priset lika med 0 (jmfr $[H]$).

Som numerisk illustration betraktar vi först europeiska köpoptioner i en aktie vars pris har volatiliteten 20 procent per år och aktiekursen 40 kr i detta ögonblick. Räntan antages vara 5 procent per år (dvs den kontinuerliga räntan är $\ln 1.05$ procent per år). De teoretiska priserna för köpoptionerna beräknas exakt med hjälp av sats 1. Som jämförelse beräknas i några specialfall köpoptionsvärden med binomialapproximationen för $N = 5$, $N = 20$ och $N = 50$.

exakta värden

$K\backslash\tau$	1/12	4/12	7/12
35	5.15	5.76	6.40
40	1.00	2.17	3.00
45	0.02	0.51	1.10

$N = 5$

$K\backslash\tau$	1/12	4/12	7/12
35	5.14	5.77	6.45
40	1.05	2.26	3.12
45	0.02	0.54	1.15

$N = 20$

$K\backslash\tau$	1/12	4/12	7/12
35	5.15	5.77	6.39
40	0.99	2.14	2.97
45	0.02	0.51	1.11

$N = 50$

$K\backslash\tau$	1/12	4/12	7/12
35	5.15	5.76	6.40
40	1.00	2.16	2.99
45	0.02	0.51	1.11

Om vi simulerar 1 miljon Gaussiska slumptal och beräknar motsvarande köpoptionsvärden med Monte Carlo-metoden får vi i enskilda försök följande jämförelser:

exakta värden

$K\backslash\tau$	1/12	4/12	7/12
35	5.15	5.76	6.40
40	1.00	2.17	3.00
45	0.02	0.51	1.10

10^6 *slumptal*

$K\backslash\tau$	1/12	4/12	7/12
35	5.15	5.75	6.40
40	1.00	2.17	3.00
45	0.02	0.51	1.11

För ett enkelt amerikanskt kontrakt med utbetalningsfunktionen g kan det vara optimalt att lösa in kontraktet före slutdagen. Med binomialapproximation gäller liksom för motsvarande europeiska kontrakt att

$$v(t_N, se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}) = g(se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}),\ j = 0, 1, ..., N.$$

Därefter beräknas successivt för tidpunkterna $t_n, n = N-1, N-2, ..., 2, 1, 0$, optionspriserna

$$v(t_n, se^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}})$$

$$= \max(g(se^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}}), e^{-rh}(q_u v(t_{n+1}, se^{(n+1-2j)\sigma\sqrt{h}}) + q_d v(t_{n+1}, se^{(n-1-2j)\sigma\sqrt{h}})))$$

för $j = 0, 1, ..., n$. Som numerisk illustration väljer vi en amerikansk säljoption i en aktie vars pris har volatiliteten 20 procent per år och som just nu har värdet 40 kr. Räntan antages som ovan vara 5 procent per år. För lösenpriset $K = 45$ och tidslängden $\tau = 4/12$ till slutdagen erhålls säljoptionsvärdet 5.08 om $N = 25$ och 5.09 om $N = 50, 75$, 100 och 150. För motsvarande europeiska säljoption är värdet 4.78. Om istället $\tau = 1/12$ blir det amerikanska säljoptionsvärdet 5 och en närmare analys visar att det är optimalt att lösa in optionen.

Vi avslutar detta viktiga kapitel med några resultat för exotiska optioner. Ett finansiellt derivat som utbetalar beloppet

$$Y = g((S(t))_{0\leq t\leq T})$$

vid tiden T kallas ett betingat kontrakt av europeisk typ med slutdagen T. Utbetalningen på slutdagen beror alltså i allmänhet på hela priskurvan

$$S(t),\ t \in [0, T]\,.$$

Som specialfall vill vi nämna så kallade asiatiska optioner där t ex

$$Y = \max(0, \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt - K)$$

eller

$$Y = \max(0, K - \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt)$$

samt så kallade lookback-optioner där t ex

$$Y = S(T) - \min_{0\le t\le T} S(t)$$

("köp till det lägsta priset") eller

$$Y = \max_{0\le t\le T} S(t) - S(T)$$

("sälj till det högsta priset"). Om

$$Y = 1_{\left[\max_{t\le\lambda<T} S(\lambda)>H\right]} \max(0, S(T) - K)$$

så har vi en så kallad ned-och-ut-barriäroption. Här är $H, K > 0$. En diskret upp-och-ut-barriäroption ger utbetalningen

$$g(S(T_1), ..., g(S(T_n)) = 1_{\left[\max_{1\le j\le n-1} S(T_j)<H\right]} \max(0, S(T) - K))$$

vid tiden T, där $T = T_n > T_{n-1} > ... > T_1 > t$ och där $H > K > 0$ är givna.

Betingade kontrakt går i allmänhet bortom Black-Scholes differentialekvation. Motsvarande disktreta versioner kan dock behandlas inom ramen för den teori som vi redan utvecklat. Betrakta nämligen ett kontrakt med utbetalningen

$$g(S(T_1), ..., S(T_n))$$

slutdagen $T = T_n$, där $T_n > T_{n-1} > ... > T_1$. Vi antager att dagens datum $t < T_1$. Av rent tekniska skäl förutsätts att g är kontinuerlig och att

$$\sup_{x_1,...,x_n\in\mathbf{R}} (e^{-A(|x_1|+...+|x_n|)} \mid g(e^{x_1}, ..., e^{x_n}) \mid) < \infty$$

för en lämplig positiv konstant A.

Det är i fortsättningen praktiskt att sätta

$$M_\sigma(t_1, t_2) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t_2-t_1)+\sigma(W(t_2)-W(t_1))}$$

om $0 \le t_1 \le t_2$. Observera att $M_\sigma(0, t) = M_\sigma(t)$ och att

$$M_\sigma(t_1, t_2)M_\sigma(t_2, t_3) = M_\sigma(t_1, t_3),\ \ t_1 \le t_2 \le t_3.$$

Vid tiden T_{n-1} är $S(T_1), ..., S(T_{n-1})$ kända och det aktuella aktiederivatet kan uppfattas som ett enkelt europeiskt derivat med slutdagen T och utbetningen $g(S(T_1), ..., S(T_{n-1}), S(T))$. Dess värde vid tiden T_{n-1} är lika med $v_{n-1}(T_{n-1}, S(T_1), ..., S(T_{n-1}))$, där

$$v_{n-1}(T_{n-1}, s_1, ..., s_{n-1})$$
$$= e^{-r(T-T_{n-1})} E\left[g(s_1, ..., s_{n-1}, s_{n-1}e^{r(T-T_{n-1})} M_\sigma(T_{n-1}, T))\right].$$

Vid tiden T_{n-2} är $S(T_1), ..., S(T_{n-2})$ kända och aktiederivatet kan uppfattas som ett enkelt europeiskt derivat med slutdagen T_{n-1} och utbetalningen $v_{n-1}(T_{n-1}, S(T_1), ..., S(T_{n-2}), S(T_{n-1}))$. Dess värde vid tiden T_{n-2} är därför lika med $v_{n-2}(T_{n-2}, S(T_1), ..., S(T_{n-2}))$, där

$$v_{n-2}(T_{n-2}, s_1, ..., s_{n-2})$$
$$= e^{-r(T_{n-1}-T_{n-2})} E\left[v_{n-1}(T_{n-1}, s_1, ..., s_{n-2}, s_{n-2}e^{r(T_{n-1}-T_{n-2})} M_\sigma(T_{n-2}, T_{n-1})\right]$$

och det följer att

$$v_{n-2}(T_{n-2}, s_1, ..., s_{n-2}) = e^{-r(T-T_{n-2})} \times$$
$$E\left[g(s_1, ..., s_{n-2}, s_{n-2}e^{r(T_{n-1}-T_{n-2})} M_\sigma(T_{n-2}, T_{n-1}), s_{n-2}e^{r(T-T_{n-2})} M_\sigma(T_{n-2}, T)\right].$$

Om vi sätter $S(t) = s$ så följer genom upprepning att derivatets värde vid tiden t är lika med $v(t, S(t))$ där

$$v(t, s)$$
$$= e^{-r(T-t)} E\left[g(se^{r(T_1-t)} M_\sigma(t, T_1), ..., se^{r(T_{n-1}-t)} M_\sigma(t, T_{n-1}), se^{r(T-t)} M_\sigma(t, T))\right].$$

Optionsvärdet ges således av en integral i $\mathbf{R}^n$. I tillämningar är n ofta av storleksordningen $10 - 100$, så vi har ett delikat numeriskt problem. Monte Carlo-metoden är i regel långsam men ger till slut ett svar. Om möjligt används därför snabbare specialmetoder som kan variera starkt från fall till fall.

För mer information om exotiska optioner hänvisas till $[J2]$.

Övningar

I nedanstående övningar i detta kapitel förutsätts Black-Scholes modell och de standardbeteckningar vi infört ovan.

1. Antag tiden mäts i år och att räntan $r = \ln 1.05$. Betrakta en aktie med volatiliteten $\sigma = 0.27$ och en europeisk köpoption i aktien med slutdagen 20 mars och lösenpriset 100 kr. Under perioden 20 januari-20 februari stiger aktiepriset från 97 kr till 112 kr. Med hur många procent stiger det teoretiska optionspriset under samma period?

2. Låt $\varphi = \Phi'$ och $c = c(t, s, K; T)$. Visa att

$$\frac{\partial c}{\partial s} = \Phi(d_1) \qquad (Delta)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial s^2} = \frac{\varphi(d_1)}{s\sigma\sqrt{\tau}} \qquad (Gamma)$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = K\tau e^{-r\tau}\Phi(d_2) \qquad (Rho)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{s\varphi(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rKe^{-r\tau}\Phi(d_2) \qquad (Theta)$$

och

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = s\varphi(d_1)\sqrt{\tau} \qquad (Vega).$$

Varför gäller att

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\, Gamma + rS\, Delta + Theta = rc?$$

3. Antag $g \in \mathcal{P}$ och $Y = g(S(T))$. Sätt $\Pi_Y(t) = v(t, S(t))$ och visa att

$$\frac{\partial v}{\partial s}(t,s) = \frac{e^{-r\tau}}{s\sigma\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})W(\tau)\right]$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s) = \frac{e^{-r\tau}}{s^2\sigma\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})(\frac{W^2(\tau)}{\sigma\tau} - W(\tau) - \frac{1}{\sigma})\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})(\frac{W(\tau)}{\sigma} - \tau)\right]$$

och

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma}(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})(\frac{W^2(\tau)}{\sigma\tau} - W(\tau) - \frac{1}{\sigma})\right]$$

för $\tau = T - t > 0$.

4. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen T utbetalar denna dag beloppet $g(S(T))$, där $g \in \mathcal{P}$. Bestäm en funktion $\Theta(t, s, y)$ sådan att derivatets pris vid tiden $t < T$ är lika med $v(t, S(t))$, där

$$v(t, s) = \int_0^\infty g(y)\Theta(t, s, y)dy.$$

5. Antag K och L är positiva konstanter.

   $a)$ **("cash or nothing call")** Ett europeiskt derivat i aktien utbetalar ingenting om aktiepriset understiger K slutdagen T och i annat fall utbetalar derivatet beloppet L denna dag. Bestäm derivatets värde vid tiden t.

   $b)$ **("asset or nothing call")** Ett europeiskt derivat i aktien utbetalar ingenting om aktiepriset understiger K slutdagen T och i annat fall utbetalar derivatet beloppet $S(T)$ denna dag. Bestäm derivatets värde vid tiden t.

6. (Speciell **"as you like it"** option eller **"chooser"** option) Låt $t < T < T_1$ och $K > 0$. Ett finansiellt derivat ger innehavaren rättigheten, men ej skyldigheten, att vid tiden T välja antingen en europeisk köpoption i aktien med slutdagen T_1 och lösenpriset K eller en europeisk säljoption i aktien med slutdagen T_1 och lösenpriset K. Bestäm derivatets värde vid tiden t.

7. Visa att

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} = \frac{s d_1 d_2}{\sigma}\varphi(d_1)\sqrt{\tau}$$

   och dra slutsatsen att funktionen $\sigma \to c(t, s, K; T)$ är en konvex funktion i intervallet $]0, \sigma_0]$ och en konkav funktion i intervallet $[\sigma_0, \infty[$, där

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{\tau} \mid \ln \frac{s e^{r\tau}}{K} \mid}.$$

8. Ett finanasiellt derivat av Europeisk typ ger innehavaren beloppet 1 slutdagen T om $S(T) \leq K$ och i motsatt fall erhåller innehavaren ingenting. Antag $t < T$ och låt $v(t, S(t))$ beteckna derivatets pris vid tiden t. För vilket värde på s är $\Delta(s) = v'_s(t, s)$ minimal?

9. Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet $Y = \cos^2(\ln S(T))$. Bestäm derivatets pris vid tiden $t \leq T$.

10. En forwardstartande aktiesäljoption av europeisk typ utbetalar beloppet $\max(0, S(T_0) - S(T))$ slutdagen T. Bestäm säljoptionens pris vid tiden t_0.

11. Antag $X \in N(\alpha, \sigma^2)$, där $\sigma > 0$, och sätt $Y = e^X$. Visa att

$$E[\min(K, Y)]$$
$$= E[Y]\,\Phi(\frac{\ln\frac{K}{E[Y]} - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}) + K\Phi(\frac{\ln\frac{E[Y]}{K} - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma})$$

för alla $K > 0$.

12. Sätt $g(\tau) = c(t, 1, 1; T)$ då $T \geq \tau = T - t \geq 0$ och observera att $c(t, s, s; T) = sg(T - t)$. Nedan antages att $1/T + 2r + \sigma^2/4 \geq r^2/\sigma^2$.

    a) Visa att g är konkav och $g(0) = 0$. Dra slutsatsen att $g(\lambda\tau) \geq \lambda g(\tau)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \tau \leq T$. Rita slutligen grafen för funktionen $y = g(\tau)$, $0 \leq \tau \leq T$ då $T = 1$, $\sigma = 0.25$ och $r = \ln 1.05$.

    b) Låt $t \leq t_* < T$. Ett derivat i aktien utbetalar $\max(0, S(T) - S(t_*))$ vid tiden T. Visa att derivatets teoretiska värde vid tiden t är lika med $S(t)g(T - t_*)$.

    c) (**"tandem option"**) Låt $\tau = T - t > 0$ och sätt $t_j = t + \frac{j}{n}\tau$, $j = 0, ..., n$ där $n \in \mathbf{N}_+$. Ett derivat utbetalar $\max(0, S(t_j) - S(t_{j-1}))$ vid tiden t_j för $j = 1, ..., n$. Visa att derivatets teoretiska värde vid tiden t är lika med $nS(t)g(\tau/n)$ och dra slutsatsen att detta värde ej understiger $c(t, S(t), S(t); T)$.

13. Visa att ett enkelt derivat av europeisk typ i aktien med utbetalningsfunktionen $g \in \mathcal{P}$ och slutdagen T har värdet $v(t, S^T_{term}(t))$ vid tiden t där
$$v(t, s_{term}) = e^{-r\tau} E\left[g(s_{term} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma W(\tau)})\right]$$
där $G \in N(0, 1)$.

14. Ett enkelt derivat av europeisk typ med utbetalningsfunktionen $g \in \mathcal{P}$ och slutdagen T har värdet $v(t, S(t))$ vid tiden t där
$$v(t, s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)})\right].$$
Visa att $v(t, s)$ är en konvex funktion av s om g är en konvex funktion.

15. Ett enkelt derivat av europeisk typ med utbetalningsfunktionen $g \in \mathcal{P}$ och slutdagen T har värdet $v(t, S(t))$ vid tiden t där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})\right].$$

Antag g är konvex och $g(0+) = 0$. Visa att $v(t,s) \geq g(s)$. (Ledning: Jensens formel, Appendix.)

16. En funktion $f :]a,b[\to]0,\infty[$ säges vara log-konvex om $\ln f$ är konvex. a) Visa att funktionen $f :]a,b[\to]0,\infty[$ är log-konvex om och endast om funktionen $f(x)\exp(cx)$, $a < x < b$, är konvex för alla reella tal c. b) Visa att summan av två log-konvexa funktioner är log-konvex.

17. Ett enkelt derivat av europeisk typ med utbetalningsfunktionen $g \in \mathcal{P}$ och slutdagen T har värdet $v(t, S(t))$ vid tiden t där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})\right].$$

Antag funktionen g endast antager positiva värden och att funktionen $\ln g(e^x)$ är en konvex funktion av x. Visa att optionsprisets elasticitet med avseende på aktiepriset är en växande funktion av aktiepriset s.

18. En amerikansk säljoption i aktien med slutdagen T och lösenpriset K har det teoretiska priset $P(t, S(t), K; T)$ vid tiden t. Antag $\sigma = 0.25$, $r = \ln 1.05$, $t = 0$, $T = 1/6$, och $K = 45$. Rita grafen för funktionen $y = P(s) = P(t, s, K; T)$, $35 \leq s \leq 54$. Rita i samma koordinatsystem grafen för funktionen $y = \max(0, K - s)$, $35 \leq s \leq 54$.

19. Antag $g \in \mathcal{P}$ och

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})\right]$$

där $\tau = T - t$. Visa att

$$v(t,s) = e^{-r\tau_*} E\left[v(t_*, se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau_*+\sigma W(\tau_*)})\right]$$

för $t \leq t_* \leq T$ där $\tau_* = t_* - t$. (Ledning: Om $G, G' \in N(0,1)$ är stokastiskt oberoende så gäller att $\sqrt{\tau_*}G + \sqrt{T - t_*}G' \in N(0,\tau)$.)

20. a) Antag $Y, V \in L^2(P)$, där V ej är konstant och $E[V] = \alpha_V$. Låt $\beta \in \mathbf{R}$. Visa att $\mathrm{Var}(Y - \beta(V - \alpha_V))$ är minimal om

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(Y, V)}{\mathrm{Var}(V)}.$$

b) Definiera

$$Y = f(X) = e^{-r\tau} \max(0, se^X - K)$$

där $X \in N((r - \frac{\sigma^2}{2})\tau, \sigma^2\tau)$ och där r, s, K, σ och $\tau > 0$ är positiva konstanter (med standardbeteckningar från Black-Scholes modell gäller att $c(t, s, K; T) = E[Y]$). Sätt $V = e^X$ och beräkna

$$\beta_0 = \frac{\mathrm{Cov}(Y, V)}{\mathrm{Var}(V)}.$$

c) Beräkna $c(0, 100, 105; 1/12)$ i fallet $r = \ln 1.05$ och $\sigma = 0.3$.

d) Låt $X_1, ..., X_n$ vara stokastiskt oberoende observationer på den stokastiska variabeln X i del b) och sätt

$$Y_i = f(X_i),\ i = 1, ..., n,$$

$$V_i = e^{X_i},\ i = 1, ..., n,$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

$$\bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i$$

och

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(V_i - \bar{V})}{\sum_{i=1}^{n}(V_i - \bar{V})^2}.$$

Betrakta följande skattningar av köpoptionspriset $c(t, s, K; T)$, nämligen

$$MC_1(n) = \bar{Y},$$

$$MC_2(n) = \bar{Y} - \hat{\beta}(\bar{V} - \alpha_V)$$

och

$$MC_3(n) = \bar{Y} - \beta_0(\bar{V} - \alpha_V)$$

där β_0 definieras i del b). Beräkna $c(0, 100, 105; 1/12)$ med hjälp av skattningen $MC_1(1000)$ i fallet $r = \ln 1.05$ och $\sigma = 0.3$. Upprepa försöket 100 gånger och beräkna stickprovets varians. Behandla till sist samma uppgifter för de två andra skattningarna.

21. Låt $P(t, S(t), K)$ beteckna det teoretiska värdet vid tiden t för en amerikansk säljoption i aktien med slutdagen T och lösenpriset K och låt $p(t, S(t), K)$ beteckna det teoretiska värdet för motsvarande säljoption av europeisk typ. Antag

$$t = t_0 < ... < t_N = T$$

betecknar en indelning av intervallet $[t, T]$ som i texten ovan så att $h = t_k - t_{k-1} = \tau/N$, $k = 1, ..., N$. Skillnaden

$$P(t, s, K) - p(t, s, K)$$

kan approximeras med $v_a(t, s) - v_e(t, s)$ som bestäms genom följande algoritm: beräkna först

$$v_a(t_N, se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}) = v_e(t_N, se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}})$$

$$= \max(0, K - se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}),\ j = 0, 1, ..., N;$$

definiera

$$q_u = \frac{e^{rh} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

och $q_d = 1 - q_u$ och beräkna därefter successivt för tidpunkterna $t_n, n = N-1, N-2, ..., 2, 1, 0$, storheterna

$$v_a(t_n, se^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}})$$

$$= \max(K - se^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}}$$

$$, e^{-rh}(q_u v_a(t_{n+1}, se^{(n+1-2j)\sigma\sqrt{h}}) + q_d v_a(t_{n+1}, se^{(n-1-2j)\sigma\sqrt{h}}))$$

och

$$v_e(t_n, se^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}})$$

$$= e^{-rh}(q_u v_e(t_{n+1}, se^{(n+1-2j)\sigma\sqrt{h}}) + q_d v_e(t_{n+1}, se^{(n-1-2j)\sigma\sqrt{h}}))$$

för $j = 0, 1, ..., n$.

a) Hur stort behöver N vara för att ge ett approximativt bra värde på $P(t, s, K) - p(t, s, K)$ med denna algoritm?

b) Hur stort behöver N vara för att ge ett approximativt bra värde på $P(t, s, K)$ med binomialapproximationen?

Experimentera med datorn! Studera också gärna artikeln [HW] .