5. Bivariat geometrisk Brownsk rörelse

Betrakta en matematisk modell för två aktier på samma marknad med prisprocesserna $(S_1(t))_{t\geq 0}$ och $(S_2(t))_{t\geq 0}$. Aktien med prisprocessen $(S_i(t))_{t\geq 0}$ kallas för den i:te aktien för $i = 1, 2$.

Det är naturligt att antaga att

$$S_1(t) = S_1(0)e^{\alpha_1 t + \sigma_1 W_1(t)},\ t \geq 0$$

och

$$S_2(t) = S_2(0)e^{\alpha_2 t + \sigma_2 W_2(t)},\ t \geq 0$$

där $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ och $(W_1(t))_{t\geq 0}$ och $(W_2(t))_{t\geq 0}$ är två normaliserade Wienerprocesser. Speciellt gäller då att

$$E\left[W_1(t)\right] = E\left[W_2(t)\right] = 0$$

och

$$E\left[W_1(s)W_1(t)\right] = E\left[W_2(s)W_2(t)\right] = \min(s, t).$$

Det bör också finnas ett samband mellan de båda aktiernas prisprocesser. Vi postulerar följande

(i) för alla $t_{11}, ..., t_{1m}, t_{21}, ..., t_{2n} \geq 0$ *och* $m, n \in \mathbf{N}_+$ *så gäller att den* $\mathbf{R}^{m+n}$*-värda stokastiska variabeln*

$$(W_1(t_{11}), ...W_1(t_{1m}), W_2(t_{21}), ..., W_2(t_{2n}))$$

har en centrerad Gaussisk fördelning

(ii) det finns och reellt tal $\rho \in \left]-1, 1\right[$ *så att*

$$E\left[W_1(s)W_2(t)\right] = \rho \min(s, t).$$

Aktiernas prisprocesser sägs i detta fall beskriva en bivariat geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift och korrelationsparametern ρ.

Antag omvänt att $\rho \in \left]-1, 1\right[$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ är givna och att vi har två stokastiskt oberoende normaliserade Wienerprocesser $(X_1(t))_{t\geq 0}$ och $(X_2(t))_{t\geq 0}$. Om vi definierar

$$\begin{cases} W_1(t) = X_1(t) \\ W_2(t) = \rho X_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}X_2(t) \end{cases}$$

och aktiepriser

$$\begin{cases} S_1(t) = S_1(0)e^{\alpha_1 t + \sigma_1 W_1(t)} \\ S_2(t) = S_2(0)e^{\alpha_2 t + \sigma_2 W_2(t)} \end{cases}$$

för alla $t \geq 0$, så beskriver dessa aktiepriser en bivariat geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift och korrelationsparametern ρ. Varje bivariat geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift har denna form.

Antag fr o m nu att vi har en modell bestående av två aktier med prisprocesser givna av en bivariat geometrisk Brownsk rörelse med samma beteckningar som ovan. Vi skall värdera ett aktiederivat av europeisk typ som utbetalar beloppet

$$g(S_1(T), S_2(T))$$

slutdagen T, där det förutsätts att g är kontinuerlig samt positivt homogen av graden 1 dvs

$$g(\lambda s_1, \lambda s_2) = \lambda g(s_1, s_2),\ \lambda > 0.$$

Dessutom antags att

$$\sup_{x_1, x_2 \in \mathbf{R}} (e^{-A(|x_1|+|x_2|)} \mid g(e^{x_1}, e^{x_2}) \mid) < \infty$$

för en lämplig positiv konstant A. Observera att det inte förutsätts att vår modell innehåller någon obligation.

Optionens värde kommer att bestämmas genom att uppfatta en aktieandel i aktie 2 såsom ny prisenhet. Den första aktien får då prisprocessen

$$S(t) = \frac{S_1(t)}{S_2(t)},\ t \geq 0$$

och den andra aktien får prisprocessen

$$B(t) = 1,\ t \geq 0.$$

Med vår nya prisenhet utbetalar optionen $f(S(T))$ prisenheter slutdagen T, där

$$f(s) = g(s, 1)$$

ty

$$g(s_1, s_2) = s_2 g(\frac{s_1}{s_2}, 1).$$

Sätt

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

och observera att
$$S(t) = S(0)e^{(\alpha_1-\alpha_2)t+\sigma W(t)}$$
där
$$W(t) = \frac{1}{\sigma}\left\{(\sigma_1 - \rho\sigma_2)X_1(t) - \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}X_2(t)\right\},\ t \geq 0$$
är en normaliserad Wienerprocess. Vi kan alltså uppfatta vår kapitalmarknad som ett gränsfall av Black-Scholes modell då räntan konvergerat mot noll. Optionen har därför värdet $v(t, S(t))$ vid tiden $t \leq T$, där

$$v(t,s) = E\left[f(se^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau+\sigma W(\tau)})\right]$$

och $\tau = T-t$. I den ursprungliga prisenheten får optionen värdet $u(t, S_1(t), S_2(t))$ vid tiden t, där
$$u(t, s_1, s_2) = s_2 v(t, \frac{s_1}{s_2}).$$
Observera att optionspriset u är ränteoberoende i den meningen att priset ej är explicit beroende av räntan.

Beräkning av derivator för $t < T$ ger

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{\partial v}{\partial s}(t, \frac{s_1}{s_2})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} = \frac{1}{s_2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t, \frac{s_1}{s_2})$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} = -\frac{s_1}{s_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t, \frac{s_1}{s_2})$$
$$\frac{\partial u}{\partial s_2} = v(t, \frac{s_1}{s_2}) - \frac{s_1}{s_2}\frac{\partial v}{\partial s}(t, \frac{s_1}{s_2})$$
och
$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} = \frac{s_1^2}{s_2^3}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t, \frac{s_1}{s_2}).$$
Det följer härav att

$$\sigma_1^2 s_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 s_1 s_2 \frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} + \sigma_2^2 s_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2}$$

$$= s_2 \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t, \frac{s_1}{s_2}).$$

Eftersom Black-Scholes differentialekvation i gränsfallet $r = 0$ ger att

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = 0$$

följer att

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \sigma_1^2 s_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 s_1 s_2 \frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} + \sigma_2^2 s_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} \right\} = 0.$$

Dessutom är

$$u_{|t=T} = g.$$

Denna differentialekvation med slutvillkor är ett gränsfall av Black-Scholes differentialekvation i två prisvariabler.

Följande exempel går tillbaka till Margrabe $[MAR]$.

Exempel 1. Betrakta rättigheten, men ej skyldigheten, att få byta aktie 2 mot aktie 1 vid tiden T . Här är

$$g(s_1, s_2) = \max(0, s_1 - s_2)$$

och

$$f(s) = \max(0, s - 1).$$

Således följer av Black-Scholes köpoptionsformel för $t < T$ att

$$v(t, s) = s\Phi(d_1) - \Phi(d_2)$$

där

$$d_1(s) = \frac{\ln s + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

och

$$d_2(s) = \frac{\ln s - \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Optionens pris vid tiden t blir nu lika med $u(t, S_1(t), S_2(t))$ där

$$u(t, s_1, s_2) = s_2 v(t, \frac{s_1}{s_2})$$

$$= s_1\Phi(d_1(\frac{s_1}{s_2})) - s_2\Phi(d_2(\frac{s_1}{s_2})).$$

Exempel 2. Betrakta optionen på maximum av priset för aktie 1 och aktie 2 vid tiden T. Här är

$$g(s_1, s_2) = \max(s_1, s_2).$$

Eftersom

$$g(s_1, s_2) = s_2 + \max(0, s_1 - s_2)$$

blir

$$u(t, s_1, s_2) = s_1\Phi(d_1(\frac{s_1}{s_2})) + s_2(1 - \Phi(d_2(\frac{s_1}{s_2})))$$

och efter förenkling

$$u(t, s_1, s_2) = s_1\Phi(d_1(\frac{s_1}{s_2})) + s_2\Phi(d_1(\frac{s_2}{s_1})).$$

Vissa valutaoptioner kan behandlas med de metoder vi berört ovan. Som ett exempel studeras nedan rättigheten, men ej skyldigheten, att köpa en given japansk aktie ett framtida datum T till ett givet pris K i svenska kronor. Antags att aktien har prisprocessen $(U(t))_{t\geq 0}$ i yen och att en yen har prisprocessen $(\xi(t))_{t\geq 0}$ i svenska kronor så har optionen värdet

$$\max(0, U(T)\xi(T) - K)$$

i svenska kronor vid tiden T. För att värdera optionen förutsätts att aktiekursen och yenkursen beskriver en bivariat geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift och korrelationsparametern $\rho \in \,]-1, 1[$. Det finns därför två stokastiskt oberoende normaliserade Wienerprocesser $(X_1(t))_{t\geq 0}$ och $(X_2(t))_{t\geq 0}$ och ett reellt tal $\rho \in \,]-1, 1[$ så att

$$U(t) = U(0)e^{\alpha_U t + \sigma_U W_U(t)}$$

och

$$\xi(t) = \xi(0)e^{\alpha_\xi t + \sigma_\xi W_\xi(t)}$$

där

$$\begin{cases} W_U(t) = X_1(t) \\ W_\xi(t) = \rho X_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2}X_2(t) \end{cases}$$

och $\alpha_U, \alpha_\xi \in \mathbf{R}$, $\sigma_U, \sigma_\xi > 0$. Vi kan uppfatta

$$S(t) = \xi(t)U(t), \; t \geq 0$$

som prisprocessen för ett svenskt värdepapper. Här är

$$S(t) = S(0)e^{(\alpha_U + \alpha_\xi)t + \sigma W(t)}$$

där

$$W(t) = \frac{1}{\sigma}\left\{(\sigma_U + \rho\sigma_\xi)X_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}X_2(t))\right\}$$

och

$$\sigma = \sqrt{{\sigma_U}^2 + 2\rho\sigma_U\sigma_\xi + \sigma_\xi^2}.$$

Eftersom processen $(W(t))_{t\geq 0}$ är en normaliserad Wienerprocess blir optionspriset uttryckt i svenska kronor vid tiden $t < T$ enligt Black-Scholes formel lika med

$$U(t)\xi(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$$

där $\tau = T - t$,

$$d_1 = \frac{\ln\frac{U(t)\xi(t)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

och

$$d_2 = \frac{\ln\frac{U(t)\xi(t)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Det är här underförstått att det på den svenska marknaden finns en obligation med priset $B(t) = B(0)e^{rt}$ vid tiden t.

Övningar

1. Visa att summan av två stokastiskt oberoende Wienerprocesser är en Wienerprocess.

2. Låt G_1, G_2 vara två stokastiskt oberoende $N(0,1)$-variabler. a) Sätt

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Visa att processerna $(X_k)_{k=1}^2$ och $(Y_k)_{k=1}^2$ är ekvivalenta i fördelning.
b) Låt $(X_k)_{k=1}^2$ vara en centrerad Gaussprocess och sätt

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

där a, b och c är reella tal. Visa att dessa tal kan väljas så att processerna $(X_k)_{k=1}^2$ och $(Y_k)_{k=1}^2$ är ekvivalenta i fördelning.

3. Betrakta rättigheten, men ej skyldigheten, att få köpa en given japansk aktie ett framtida datum T till ett givet pris K i svenska kronor. Antags att aktien har prisprocessen $(U(t))_{t\geq 0}$ i yen och att en yen har prisprocessen $(\xi(t))_{t\geq 0}$ i svenska kronor så har optionen värdet

$$\begin{aligned} &\max(0, U(T)\xi(T) - K) \\ = \xi(T) &\max(0, U(T) - \frac{K}{B(T)} B(T)\xi^{-1}(T)) \end{aligned}$$

i svenska kronor vid tiden T, där $B(t) = B(0)e^{rt}$ är priset för en svensk obligation vid tiden t. Uppfatta $(B(t)\xi^{-1}(t))_{t\geq 0}$ som prisprocessen för ett japanskt värdepapper och värdera optionen med hjälp av exempel 1.

4. Betrakta ett aktiederivat av europeisk typ som utbetalar beloppet

$$Y = g(S_1(T), S_2(T))$$

slutdagen T. Det förutsätts att g är kontinuerlig samt positivt homogen av graden 1 dvs

$$g(\lambda s_1, \lambda s_2) = \lambda g(s_1, s_2), \ \lambda > 0.$$

Dessutom förutsätts att

$$\sup_{x_1, x_2 \in \mathbf{R}} (e^{-A(|x_1|+|x_2|)} \mid g(e^{x_1}, e^{x_2}) \mid) < \infty$$

för en lämplig positiv konstant A. Visa att

$$\Pi_Y(t) \geq g(S_1(t), S_2(t))$$

om g är konvex.