Appendix

Konvexitet i $\mathbf{R}^n$

De matematiska metoderna inom teorin för finansiella derivat går ofta tillbaka till stokastisk eller konvex analys. I detta kapitel uppmärksammas några grundläggande resultat inom konvexitetsteorin. I slutet av kapitlet används separationssatser för konvexa mängder för att på nytt utreda frågan om arbitrage i binomialmodellen med ett tidssteg.

En delmängd A av $\mathbf{R}^n$ sägs vara konvex, om sträckan som förbinder två godtyckliga punkter i mängden alltid ligger i mängden dvs om

$$x, y \in A \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in A,\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Antag $D \subseteq \mathbf{R}^n$. En funktion $f : D \to \mathbf{R}$ kallas konvex om D är konvex och

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

för alla $x, y \in D$ och alla $0 \leq \lambda \leq 1$. En funktion f är konkav om $-f$ är konvex.

Om A och B är delmängder av $\mathbf{R}^n$ och $\alpha \in \mathbf{R}$ definieras

$$A + B = \{x + y;\ x \in A \text{ och } y \in B\}$$

och

$$\alpha A = \{\alpha x;\ x \in A\}.$$

Mängden $A+B$ kallas för summan eller, om det finns behov av att vara tydlig, Minkowskisumman av A och B. Observera att $A + B$ och αA är konvexa om A och B är konvexa. Om A är konvex så gäller också att $A + A = 2A$.

Vi uppfattar ett element $x \in \mathbf{R}^n$ som en kolonnmatris. Transponatet av en matris A med reella element betecknas med A^*. Den vanliga skalärprodukten $x \cdot y$ av två vektorer x och y i $\mathbf{R}^n$ kan därför skrivas $x^* y$. Storheten

$$| x | = \sqrt{x \cdot x}$$

kallas för den euklidiska normen av vektorn $x \in \mathbf{R}^n$. För godtyckliga $x, y \in \mathbf{R}^n$ gäller parallellogramlagen

$$| x + y |^2 + | x - y |^2 = 2(| x |^2 + | y |^2)$$

triangelolikheten

$$| x + y | \leq | x | + | y |$$

och Cauchy-Schwarz olikhet

$$x \cdot y \leq | x || y | .$$

Observera att den euklidiska normen

$$x \to | x |, \; x \in \mathbf{R}^n$$

är en konvex funktion.

Om $x, y \in \mathbf{R}^n$ kallas storheten

$$d(x, y) = | x - y |$$

för avståndet mellan x och y.

Om $a \in \mathbf{R}^n$ och $r > 0$ definieras

$$B(a; r) = \{x; \, x \in \mathbf{R}^n \text{ och } d(x, a) < r\} .$$

Mängden $B(a; r)$ kallas för en öppen boll med centrum a och radie r. En delmängd U av $\mathbf{R}^n$ är öppen om det för varje $a \in U$ existerar $r > 0$ så att bollen $B(a; r)$ är en delmängd av U. En öppen boll är en öppen mängd. Unionen

$$A \cup B = \{x; \, x \in A \text{ eller } x \in B\}$$

av två öppna mängder A,$B \subseteq \mathbf{R}^n$ är öppen. Unionen av ett godtyckligt antal öppna mängder är också öppen. En delmängd F av $\mathbf{R}^n$ kallas sluten om dess komplement

$$\mathbf{R}^n \setminus F = \{x; \, x \in \mathbf{R}^n \text{ och } x \notin F\}$$

är en öppen mängd. Snittet

$$A \cap B = \{x; \, x \in A \text{ och } x \in B\}$$

av två slutna mängder A och B är slutet. Detsamma gäller för snittet av ett godtyckligt antal slutna mängder. Snittet av alla slutna mängder som omfattar en given mängd A kallas för slutna höljet av A och betecknas med $\bar{A}$. Unionen av alla öppna delmängder av en given mängd A kallas för det inre av A och betecknas med A^o. En sekvens $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ i $\mathbf{R}^n$ sägs vara konvergent om det finns ett $x \in\mathbf{R}^n$ så att

$$\lim_{k\to\infty} \mid x_k - x \mid = 0.$$

Det kan finnas högst en sådan vektor x och vi skriver

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x.$$

Observera att en delmängd A av $\mathbf{R}^n$ är sluten om och endast om varje sekvens i A, som är konvergent, konvergerar mot ett element i A.

Vi säger att en delmängd A av $\mathbf{R}^n$ är begränsad om det finns ett $r > 0$ så att $A \subseteq B(0; r)$. En sekvens i $\mathbf{R}^n$ är begränsad om dess element tillhör en lämplig begränsad mängd. Om $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ är en sekvens och $(k_i)_{i\in\mathbf{N}}$ är en strängt växande följd av naturliga tal sägs följden $(x_{k_i})_{i\in\mathbf{N}}$ vara en delföjd av följden $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$. En delmängd K av $\mathbf{R}^n$ sägs vara kompakt om varje sekvens $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ av element i K innehåller en delföljd $(x_{k_i})_{i\in\mathbf{N}}$ som konvergerar mot ett element i K. Det är lätt att visa att en kompakt mängd är sluten och begränsad. Omvändningen gäller också och är en direkt följd av följande resultat som vi godtar utan bevis.

Sats 1. (Bolzano-Weierstrass sats) *En begränsad sekvens i* $\mathbf{R}^n$ *innehåller en konvergent delföljd.*

Som ett annat exempel på hur Bolzano-Weierstrass sats kan tillämpas tar vi två delmängder A och B av $\mathbf{R}^n$, där A är sluten och B är kompakt och skall visa att Minkowskisumman $A + B$ är sluten. Välj därför en sekvens $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ i $A + B$ som konvergerar mot en punkt $x \in\mathbf{R}^n$. Vi skall visa att $x \in A + B$. Låt därför $x_k = a_k + b_k$, där $a_k \in A$ och $b_k \in B$ för varje $k \in \mathbf{N}$. Eftersom mängden B är kompakt finns en konvergent delföljd $(b_{k_i})_{i\in\mathbf{N}}$ som konvergerar mot ett element $b \in B$. Observera att sekvensen $(x_{k_i})_{i\in\mathbf{N}}$ konvergerar mot x. Eftersom $a_{k_i} = x_{k_i} - b_{k_i}$ följer att sekvensen $(a_{k_i})_{i\in\mathbf{N}}$ är konvergent. Vi kallar dess gränsvärde för a och drar slutsatsen att $a \in A$ eftersom A är sluten. Genom att låta $i \to \infty$ i relationen $x_{k_i} = a_{k_i} + b_{k_i}$ följer att $x = a+b \in A+B$.

Antag $D \subseteq \mathbf{R}^n$. En funktion $f : D \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig om

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

för varje $x_0 \in D$. Om $a \in \mathbf{R}^n$ så är linjärformen

$$f(x) = a \cdot x, \; x \in \mathbf{R}^n$$

kontinuerlig. Speciellt följer att mängden $\{x; \; x \in \mathbf{R} \text{ och } a \cdot x = 0\}$ är sluten.

Låt nu L vara ett delrum av $\mathbf{R}^n$. Vi påstår att L är en sluten mängd. Betrakta nämligen en bas $e_1, ..., e_m$ i L. Denna kan utvidgas till en bas $e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n$ för hela $\mathbf{R}^n$. Det finns en inverterbar matris $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}$ med reella element som har följande egenskap: om en godtycklig vektor x i $\mathbf{R}^n$ har koordinaterna ξ_i, $i = 1, ..., n$ relativt basen $e_1, ..., e_n$ och koordinaterna x_i, $i = 1, ..., n$, relativt standardbasen så gäller att

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \; i = 1, ..., n.$$

Alltså är

$$\xi_i = a_i \cdot x, \; i = 1, ..., n$$

där a_i betecknar rad i i matrisen A. Slutligen är L mängden av alla x sådana att $\xi_i = 0$, $i = m+1, .., n$, dvs mängden av alla x sådana att $a_i \cdot x = 0$, $i = m+1, .., n$. Ett snitt av slutna mängder är slutet så det följer att L är en sluten mängd.

Innan vi går vidare vill vi påminna om beteckningen inf M. Antag därför M är en delmängd av reella talmängden. Mängden M sägs vara nedåt begränsad om det finns ett reellt tal m så $x \geq m$ för alla $x \in M$. Talet m kallas en minorant för M. En icke-tom nedåt begränsad mängd M av reella tal har en största minorant och denna betecknas med inf M. Denna egenskap hos de reella talen tas ofta som ett axiom i de inledande högskolekurserna i analys.

Antag nu A är en icke-tom delmängd av $\mathbf{R}^n$. Vi definierar avståndsfunktionen $d(x, A)$ till A genom att

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

dvs

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a); \; a \in A\}$$

för godtyckligt $x \in \mathbf{R}^n$. Olikheten

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

ger
$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,a), \text{ alla } a \in A$$
och
$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A).$$
Genom att kasta om x och y följer därför att
$$\mid d(x,A) - d(y,A) \mid \leq d(x,y)$$
varför avståndsfunktionen
$$x \to d(x,A), \ x \in \mathbf{R}^n$$
är kontinuerlig.

Det finns för fixt $x \in \mathbf{R}^n$ en följd $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ i A så att
$$d(x,A) = \lim_{k \to \infty} d(x, a_k).$$
Följden $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ är begränsad och beroende på Bolzano-Weierstrass sats kan vi därför utan inskränkning antaga att följden $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ konvergerar mot en punkt $y \in \mathbf{R}^n$. Det följer att
$$d(x,A) = d(x,y).$$
Råkar A vara sluten måste $y \in A$. Vi säger i detta fall att det finns en punkt i A som ligger närmast x. Det kan dock finnas flera punkter i A som ligger lika nära x som y gör.

Sats 2. **(Unik närmaste punktegenskap)** *Antag att A är en sluten, icke-tom och konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och antag $x \in \mathbf{R}^n$. Då finns en unik punkt $y \in A$ sådan att*
$$d(x,A) = d(x,y).$$

Bevis. Låt
$$d = d(x,A) = \inf_{a \in A} \mid x - a \mid .$$
Antag $y, y' \in A$ är sådana att
$$d = \mid x - y \mid = \mid x - y' \mid .$$

Relationen

$$4d^2 = 2(\mid x-y\mid^2 + \mid x-y'\mid^2)$$

och parallellogramlagen ger att

$$4d^2 = \mid (x-y)+(x-y')\mid^2 + \mid (x-y)-(x-y')\mid^2$$

dvs

$$4d^2 = 4\mid x - \frac{y+y'}{2}\mid^2 + \mid y'-y\mid^2 .$$

Eftersom

$$\frac{y+y'}{2} \in A$$

följer att

$$4d^2 \geq 4d^2 + \mid y'-y\mid^2$$

dvs $y' = y$. Detta avslutar beviset för sats 2.

Vektorn y i sats 2 kallas för projektionen av x på A och betecknas med $P_A(x)$.

Sats 3. *Om A är en sluten, icke-tom och konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och $a \in A$ så gäller att*

$$(x - P_A(x)) \cdot (a - P_A(x)) \leq 0$$

för alla $x \in \mathbf{R}^n$.

Bevis. Sätt $y = P_A(x)$. Om $0 < \lambda < 1$ gäller att

$$\mid x-y\mid^2 \leq \mid x - ((1-\lambda)y + \lambda a)\mid^2$$

dvs

$$\mid x-y\mid^2 \leq \mid (x-y) - \lambda(a-y)\mid^2$$

eller

$$0 \leq -2\lambda(x-y)\cdot(a-y) + \lambda^2 \mid a-y\mid^2 .$$

Genom att dividera denna olikhet med λ och sedan låta $\lambda \to 0$ erhålls

$$0 \leq -2(x-y)\cdot(a-y).$$

Härav följer sats 3 omedelbart.

Korollarium 1. *Om A är ett delrum av $\mathbf{R}^n$ och $a \in A$ så gäller att*

$$x \cdot a = P_A(x) \cdot a$$

för alla $x \in \mathbf{R}^n$.

Då A är ett delrum av $\mathbf{R}^n$ kallas $P_A(x)$ för ortogonala projektionen av x på delrummet A.

Bevis. Ett delrum av $\mathbf{R}^n$ är slutet. Vi ersätter a med $\pm a + P_A(x)$ i föregående sats och korollarium 1 följer omedelbart.

Sats 4. (Separation av punkt och sluten konvex mängd) *Antag A är en sluten, icke-tom och konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och antag $x_0 \notin A$. Då finns en vektor $a \in \mathbf{R}^n$ och $\alpha \in \mathbf{R}$ så att*

$$a \cdot x_0 < \alpha \leq a \cdot x$$

för alla $x \in A$.

Bevis. Sätt

$$x_1 = P_A(x_0)$$

så att

$$(x_0 - x_1) \cdot (x - x_1) \leq 0, \text{ alla } x \in A$$

enligt sats 3. Vi definierar nu $a = x_1 - x_0$ och får

$$a \cdot x_1 \leq a \cdot x, \; x \in A.$$

Vidare gäller att

$$a \cdot x_0 < a \cdot x_1$$

eftersom $a \neq 0$. Vi kan därför definiera $\alpha = a \cdot x_1$ och sats 4 följer direkt.

Sats 5. *Antag $D \subseteq \mathbf{R}^n$ är öppen och $f : D \to \mathbf{R}$ konvex. Då är f kontinuerlig och till varje $x_0 \in D$ existerar $c \in \mathbf{R}^n$ så att*

$$f(x) \geq f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$$

för alla $x \in D$.

Vi nöjer oss med att visa sats 5 för $n = 1$ och $D = \mathbf{R}$.
Bevis: Låt $x_0 \in \mathbf{R}$. Vi skall visa att

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Följande bevis brukar kallas "fjärilsbevis". Välj $a, b \in \mathbf{R}$ så att $a < x_0 < b$ och låt $y = l_a(x)$ vara ekvationen för den linje i xy-planet som går genom punkterna $(a, f(a))$ och $(x_0, f(x_0))$ och låt $y = l_b(x)$ vara ekvationen för den linje i xy-planet som går genom punkterna $(b, f(b))$ och $(x_0, f(x_0))$. Konvexiteten för f medför att

$$l_b(x) \leq f(x) \leq l_a(x), \; a \leq x \leq x_0$$

och

$$l_a(x) \leq f(x) \leq l_b(x), \; x_0 \leq x \leq b.$$

Eftersom

$$\lim_{x \to x_0} l_a(x) = \lim_{x \to x_0} l_b(x) = f(x_0)$$

följer att

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funktionen f är därför kontinuerlig.

Sätt

$$E = \left\{(x, y); \; (x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ och } y \geq f(x)\right\}.$$

Mängden E är sluten eftersom f är kontinuerlig och E är konvex eftersom f är konvex. Beroende på separationssatsen för punkt och sluten konvex mängd finns för varje $n \in \mathbf{N}_+$ en linje genom punkten $(x_0, f(x_0) - \frac{1}{n})$ som inte råkar E. Detta innebär att det finns ett reellt tal c_n sådant att

$$f(x) \geq (f(x_0) - \frac{1}{n}) + c_n(x - x_0)$$

för alla $x \in \mathbf{R}$. Olikheterna

$$f(a) - f(x_0) + \frac{1}{n} \geq c_n(a - x_0)$$

och

$$f(b) - f(x_0) + \frac{1}{n} \geq c_n(b - x_0)$$

visar att sekvensen $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ är begränsad. Enligt Bolzano-Weierstrass sats finns en delföljd $(c_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ som konvergerar mot ett reellt tal som vi betecknar med c. Genom att fixera $x \in \mathbf{R}$ och låta $i \to \infty$ i olikheten

$$f(x) \geq (f(x_0) - \frac{1}{n_i}) + c_{n_i}(x - x_0)$$

så följer sats 5.

Sats 6 (Jensens olikhet) *Antag $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ konvex. Låt X vara en reellvärd stokastisk variabel sådan att*

$$E\left[\mid X \mid\right] < \infty$$

och

$$E\left[\mid f(X) \mid\right] < \infty.$$

Då gäller att

$$f(E\left[X\right]) \leq E\left[f(X)\right].$$

Bevis. Sätt $x_0 = E\left[X\right]$. Enligt föregående sats finns ett reellt tal c sådant att

$$f(X) \geq f(x_0) + c(X - x_0).$$

Alltså är

$$E\left[f(X)\right] \geq f(x_0) + cE\left[X - x_0\right] = f(x_0)$$

vilket avslutar beviset.

Korollarium 2. *Låt X vara en reellvärd stokastisk variabel sådan att*

$$E\left[\mid X \mid^a\right] < \infty$$

för ett visst positivt tal a. Då är funktionen

$$p \to (E[\mid X \mid^p])^{\frac{1}{p}},\ 0 < p \leq a$$

växande.

Bevis. Antag $0 < p < a$ och välj $b > 1$ så att $pb \leq a$. Sätt $f(x) = \mid x \mid^b$, $x \in \mathbf{R}$. Funktionen f är konvex så Jensens olikhet medför att

$$f(E[\mid X \mid^p]) \leq E[f(\mid X \mid^p)]$$

dvs

$$(E[\mid X \mid^p])^b \leq E\left[\mid X \mid^{pb}\right]$$

eller

$$(E[\mid X \mid^p])^{\frac{1}{p}} \leq (E\left[\mid X \mid^{pb}\right])^{\frac{1}{pb}}$$

vilket visar korollarium 2.

Följande separationssats är ofta användbar i matematisk ekonomi och matematisk finans.

Sats 7. (Separation av kompakt konvex mängd och delrum) *Antag K är en kompakt konvex mängd i $\mathbf{R}^n$ och antag L är ett delrum av $\mathbf{R}^n$ sådant att $K \cap L = \emptyset$. Då finns $a \in \mathbf{R}^n$ så att*

$$a \cdot x > 0,\ x \in K$$

och

$$a \cdot y = 0,\ y \in L.$$

Bevis. Låt $A = K + L$. Observera att $0 \notin A$ och att A är en sluten konvex mängd. Vi använder sats 4 med $x_0 = 0$ och får ett $a \in \mathbf{R}^n$ och ett $\alpha \in \mathbf{R}$ så att

$$0 = a \cdot 0 < \alpha \leq a \cdot u$$

för alla $u \in A$. Välj nu $x \in K$ och $y \in L$ godtyckligt. Då gäller att

$$0 < \alpha \leq a \cdot (x - y)$$

dvs
$$a \cdot x \geq a \cdot y + \alpha.$$
Genom att ersätta y med ty där $t \in \mathbf{R}$ så följer att
$$a \cdot x \geq t(a \cdot y) + \alpha$$
för alla $t \in \mathbf{R}$ och vi drar slutsatsen att $a \cdot y = 0$. Härav följer också att $a \cdot x \geq \alpha > 0$. Detta visar sats 7.

Om $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ så innebär relationen
$$x \geq 0$$
att
$$x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0$$
och relationen
$$x > 0$$
att
$$x_1 > 0, ..., x_n > 0.$$

Sats 8. *Antag $A = (a_{jk})_{1 \leq j \leq m,\, 1 \leq k \leq n}$ är en matris med reella element och antag $b \in \mathbf{R}^m$. Låt vidare a_k, $k = 1, ..n$, beteckna matrisens kolonner. Då gäller exakt ett av följande alternativ:*

(i) ekvationen
$$\{ .Ax = 0x > 0$$
är lösbar

(ii) det finns $h \in \mathbf{R}^m$ så att
$$h^* a_k \geq 0,\ k = 1, ..., n$$
där likhet ej inträffar i samtliga olikheter dvs
$$\begin{cases} A^* h \geq 0 \\ A^* h \neq 0. \end{cases}$$

Bevis. Antag först att både (i) och (ii) gäller och låt x vara som i (i) och h som i (ii). Då är

$$h^*(Ax) = h^*0 = 0$$

varför

$$(h^*A)x = 0.$$

Men $x > 0$ och $A^*h \geq 0$, $A^*h \neq 0$ så

$$(h^*A)x = ((h^*A)x)^* = x^*(A^*h) > 0$$

och det uppstår en motsägelse. Alltså gäller högst en av påståendena (i) och (ii).

Vi antar nu att (ii) ej gäller och skall visa att ekvationen i (i) är lösbar, vilket avslutar beviset för sats 8. Sätt

$$L = \{A^*h;\ h \in \mathbf{R}^m\}$$

och

$$K = \left\{x \in \mathbf{R}^n;\ x \geq 0 \text{ och } \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}.$$

Eftersom (ii) ej gäller är $K \cap L = \emptyset$. Vi utnyttjar nu separationssatsen för kompakt konvex mängd och delrum och får en vektor $a \in \mathbf{R}^n$ sådan att

$$a \cdot x > 0,\ x \in K$$

och

$$a \cdot (A^*h) = a^*A^*h = 0,\ h \in \mathbf{R}^m.$$

Den senare relationen betyder att $a^*A^* = 0$ dvs $Aa = 0$ och den första relationen betyder att $a > 0$. Ekvationen i påstående (i) är således lösbar. Detta visar sats 8.

Korollarium 3. *Antag $A = (a_{jk})_{1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n}$ är en matris med reella element och antag $b \in \mathbf{R}^m$. Låt vidare a_k, $k = 1, ..., n$, beteckna matrisens kolonner. Då gäller exakt ett av följande alternativ:*

(i) ekvationen

$$\{.Ax = bx > 0$$

är lösbar

(ii) det finns $h \in \mathbf{R}^m$ så att

$$\{. \; h^*b \le 0 \qquad h^*a_k \ge 0, \; k = 1, ..., n.$$

där likhet ej inträffar i samtliga olikheter.

Bevis. Resultatet följer direkt genom att använda sats 8 på matrisen

$$[A \mid -b]$$

vilket avslutar beviset för korollarium 3.

Exempel 1. Betrakta återigen binomialmodellen med ett tidssteg och låt en viss portfölj bestå av h_S aktier och h_B obligationer. Dess värde vid tiden t ges av

$$v(t) = h_S S(t) + h_B B(t).$$

Vi säger att ett arbitrage uppstår om portföljen kan väljas så att

$$v(0) = 0, \; v(1) \ge 0 \text{ och } v(1) \ne 0.$$

Utskrivet mer explicit innebär detta att

$$h_S S(0) + h_B B(0) = 0$$

och

$$\{.h_S S(0)e^u + h_B B(0)e^r \ge 0 h_S S(0)e^d + h_B B(0)e^r \ge 0$$

där strikt olikhet inträffar i någon av de två olikheterna. Alternativt innebär detta att h_S och h_B kan väljas så att

$$\begin{cases} h_S S(0) + h_B B(0) \le 0 \\ h_S S(0)e^u + h_B B(0)e^r \ge 0 \\ h_S S(0)e^d + h_B B(0)e^r \ge 0 \end{cases}$$

där strikt olikhet inträffar i någon av de tre olikheterna. Korollarium 3 medför att modellen saknar arbitrage om och endast om det existerar reella tal $x, y > 0$ sådana att

$$\{.S(0)e^u x + S(0)e^d y = S(0)B(0)e^r x + B(0)e^r y = B(0)$$

dvs om och endast om det existerar reella tal $x, y > 0$ sådana att

$$\{.x = e^{-r}\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}\, y = e^{-r}\frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}.$$

Modellen saknar därför arbitrage precis då

$$d < r < u.$$

Exempel 2. Betrakta en matematisk modell för en kapitalmarknad bestående av n aktier med priserna $S_1(t), ..., S_n(t)$ vid tiden t och en obligation med priset $B(t)$ vid tiden t. Här är $B(0)$ och $S_1(0), ..., S_n(0)$ positiva konstanter. Vi antager att tidsvariabeln t endast kan antaga två värden, nämligen 0 eller 1 och låter

$$B(1) = B(0)e^r$$

där konstanten $r > 0$ och

$$S_i(1) = S_i(0)e^{X_i},\ i = 1, ..., n$$

där $X_1, ..., X_n$ är reellvärda 2-punktsfördelade stokastiska variabler. Det finns alltså $u_i, di \in \mathbf{R}$, som uppfyller $u_i > d_i$, så att sannolikheterna

$$p_{u_i} = P\left[X_i = u_i\right]$$

och

$$p_{d_i} = P\left[X_i = d_i\right]$$

uppfyller

$$p_{u_i} + p_{d_i} = 1,$$

och

$$p_{u_i} > 0,\ p_{d_i} > 0$$

för $i = 1, ..., n$. Dessutom antages att

$$X_i = u_i \Rightarrow X_j = u_j \text{ för alla } i \text{ och } j.$$

Vi kan enklare säga att aktierna alla går upp samtidigt eller alla går ned samtidigt. För enkelhets skull antas också att händelserna

$$[X_i \notin \{u_i, d_i\}], \ i = 1, ..., n$$

aldrig inträffar.

Betrakta nu en portfölj som består av h_i aktier av i :te slaget för $i = 1, ..., n$ och h_B obligationer. Dess värde $V(t)$ vid tiden t ges av

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i S_i(t) + h_B B(t).$$

Ett arbitrage sägs uppstå om

$$V(0) = 0, V(1) \geq 0 \text{ och } V(1) \neq 0$$

eller ekvivalent att

$$V(0) \leq 0 \text{ och } V(1) \geq 0$$

där likhet inte inträffar i båda olikheterna. Enligt korollarium 3 är detta ekvivalent med att det finns $x > 0$ och $y > 0$ så att

$$S_i(0)e^{u_i}x + S_i(0)e^{d_i}y = S_i(0), \ i = 1, ..., n$$

och

$$B(0)e^r x + B(0)e^r y = B(0).$$

Arbitragefrihet i denna modell är således ekvivalent med att

$$u_i > r > d_i, \ i = 1, ..., n$$

och

$$\frac{e^r - e^{d_i}}{e^{u_i} - e^{d_i}} = \frac{e^r - e^{d_j}}{e^{u_j} - e^{d_j}}, \ i, j = 1, ..., n.$$

Övningar

1. Visa att minimum två konkava funktioner med samma definitionsmängd är konkav.

2. Visa att öppna bollar är konvexa.

3. Ge exempel på två slutna konvexa delmängder av $\mathbf{R}^2$ vars Minkowskisumma är öppen och skild från hela $\mathbf{R}^2$.

4. Antag $A \subseteq \mathbf{R}^n$ är sluten. Visa att funktionen

$$x \to d(x, A), \ x \in \mathbf{R}^n$$

är konvex om och endast om A är konvex.

5. Låt U vara en öppen konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$. Visa att en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $f : U \to \mathbf{R}$ är konvex om Hessematrisen

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)\right)_{1 \le j,k \le n}$$

är positivt semidefinit i varje punkt $x \in U$.

6. Låt A vara en konvex delmängd av ett vektorrum. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in A$$

för alla $x_1, ..., x_n \in A$ och alla $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ som uppfyller

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

7. Funktionen $f : A \to \mathbf{R}$ är konvex. Visa att

$$f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

för alla $x_1, ..., x_n \in A$ och alla $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ som uppfyller

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

8. Låt $x_1, ...x_n > 0$ och antag $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ uppfyller

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

Visa att

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Notera specialfallet

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

9. Antag $0 \leq t_1 < ... < t_n = T$ och låt $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ uppfylla

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Betrakta två aktiederivat av europeisk typ som utbetalar beloppen

$$X = \max(0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S(t_i) - K)$$

resp

$$Y = \max(0, \prod_{i=1}^{n} S(t_i)^{\lambda_i} - K)$$

vid tiden T där $K > 0$. Låt $t < T$. Visa att det första derivatets värde vid tiden t ej kan understiga det andra derivatets värde vid tiden t (dominansprincipen antags gälla).

10. En funktion $f : \mathbf{R} \to [0, \infty[$ sägs vara log-konkav om

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f^{\lambda}(x) f^{(1-\lambda)}(y)$$

för alla $x, y \in \mathbf{R}$ och $0 \leq \lambda \leq 1$. Antag $K > 0$. Visa att funktionerna

$$c(x) = \max(0, e^x - K),\ x \in \mathbf{R}$$

och

$$p(x) = \max(0, K - e^x),\ x \in \mathbf{R}$$

är log-konkava (dvs europeiska köp- och säljoptioners utbetalningsfunktioner är en log-konkava funktioner av log-priset).

11. Låt U vara en öppen konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och $f : U \to \mathbf{R}$ en konvex funktion. Visa att f är uppåt begränsad på varje sluten begränsad delmängd K av U.

12. Låt U vara en öppen konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och $f : U \to \mathbf{R}$ en konvex funktion. Visa att f är kontinuerlig.

13. Funktionen $u(x)$, $x > 0$, är två gånger kontinuerligt deriverbar och det gäller att $u'(x) > 0$ och $u''(x) < 0$ för alla $x > 0$. Låt vidare $a > 0$ vara givet och antag X_p är en 2-punktsfördelad stokastisk varibabel sådan att $P\left[X_p = +1\right] = p$ och $P\left[X_p = -1\right] = 1 - p$. Visa att det för varje $h \in]0, a[$ existerar $p = p(a, h) \in]0, 1[$ så att

$$u(a) = E\left[u(a + hX_p)\right].$$

Visa därefter att

$$\lim_{h \to 0+} \frac{p(a, h) - \frac{1}{2}}{h} = \frac{1}{4} R(a)$$

där

$$R(a) = -\frac{u''(a)}{u'(a)}.$$

(Funktionen R kallas Arrow-Pratts absoluta riskaversionsmått.)