

Induktion, mängder och bevis för Introduktionskursen på I

J A S, ht-04

1 Induktion

Detta avsnitt handlar om en speciell teknik för att försöka bevisa riktigheten av påståenden eller formler, för alla heltalsvärden på en ingående variabel större än något fixt heltal.

Exempel 1.1 *Fram till slutet av 60-talet fanns det både två- och femkronorsmynt i Sverige. Vilka belopp kunde betalas med enbart dessa myntsorter?*

Det är klart att inte alla belopp (t.ex. 1 krona och 3 kronor) kan betalas med myntsorterna. Men det verkar som om varje belopp som är ett heltal (den ingående variabeln) och åtminstone 4 kronor (det fixa heltalet) skulle kunna betalas med dem. Vi formulerar denna hypotes matematiskt:

För varje heltal $n \geq 4$ (beloppet) finns det heltal $a \geq 0$ (antalet tvåkronor) och $b \geq 0$ (antalet femkronor), så att

$$n = 2a + 5b.$$

Om $k = 4$, kan vi välja $a = 2$ och $b = 0$.

Anta nu att beloppet $n = p$ kan betalas med de båda myntsorterna, så att $p = 2a + 5b$, för några heltal $a, b \geq 0$. Kan då beloppet $p + 1$ också betalas på detta vis?

Vi resonerar nu så här. Om b (antalet femkronorsmynt) är åtminstone 1 ($b \geq 1$) kan vi ersätta ett av dem med 3 tvåkronorsmynt och få beloppet $p + 1$:

$$p + 1 = 2(a + 3) + 5(b - 1).$$

Om antalet femkronorsmynt är noll ($b = 0$) för betalningen av beloppet p (≥ 4), måste antalet tvåkronor vara minst två ($a \geq 2$). Vi ersätter två av dessa med ett femkronorsmynt och får beloppet $p + 1$:

$$p + 1 = 2(a - 2) + 5(b + 1).$$

Vi har alltså visat att 1) beloppet 4 kronor kan betalas med de båda myntsorterna, 2) om beloppet $p \geq 4$ kan betalas med dem, så kan man även betala beloppet $p + 1$ med dem.

Tillsammans ger nu 1) och 2) att varje belopp $n \geq 4$ kan betalas med två- och femkronorsmynt. Att 1) och 2) räcker för att bevisa vår förmodan kallas *induktionsprincipen*, medan 1) (ibland kallas *basfallet*) och 2) för *induktionssteget*. I induktionssteget görs antagandet att påståendet gäller för ett visst värde p på variablen n . Detta kallas *induktionsantagandet*. Själva tekniken kallas för *induktionsbevis* eller *bevis med induktion*.

Allmänt fungerar induktionsprincipen på följande sätt. Man har en följd av påståenden $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ vars riktighet man vill verifiera.

I vårt exempel ovan är påståendena: $P_1 =$ "4 kronor kan betalas med givna mynt", $P_2 =$ "5 kronor kan betalas med givna mynt", $P_3 =$ "6 kronor kan betalas med givna mynt" etc.

Induktionsprincipen säger då följande:

Låt $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ vara en följd av påståenden sådan att

- 1) *det första påståendet P_1 är riktigt,*
- 2) *för varje $p \geq 1$ är påståendet P_{p+1} riktigt om påståendet P_p är det.*

Då är alla påståenden P_n för $n = 1, 2, 3, \dots$ sanna.

Det finns flera variationer av induktionsprincipen, vi kommer att stöta på några av dem i exemplen som följer.

Exempel 1.2 *Följande formel gäller:*

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

för alla heltal $n = 1, 2, 3, \dots$

1) Vi skall först undersöka om formeln stämmer då $n = 1$. Först bör man observera att vänstra ledet i formeln, dvs $1 + 2 + 3 + \dots + n$, är en beteckning för summan av de n första positiva heltalen. När $n = 1$ är vänstra ledet alltså 1.

Högra ledet $n(n+1)/2$ är $1 \cdot (1+1)/2 = 1$ då $n = 1$. Alltså är vänstra och högra leden lika då $n = 1$. Formeln stämmer alltså för $n = 1$ och vi kan gå över till steg 2.

2) Här skall vi visa att om formeln är riktig för ett n -värde, säg $p \geq 1$, så är den också riktig för det efterföljande n -värdet dvs $n = p + 1$.

Antag därför att formeln stämmer när $n = p$, dvs att

$$1 + 2 + 3 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}.$$

Detta är induktionsantagandet. Vi ska då visa att även

$$1 + 2 + 3 + \dots + p + (p+1) = \frac{(p+1)(p+2)}{2}.$$

Detta är formeln när n har värdet $p + 1$. För att visa detta observerar vi (enligt induktionsantagandet) har ett alternativt uttryck för $1 + 2 + 3 + \dots + p$ i vänstra ledet. Vi sätter in detta och får då

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + p + (p+1) &= \frac{p(p+1)}{2} + (p+1) = \{\text{Gemensamt bråkstreck}\} = \\ &= \frac{p(p+1) + 2(p+1)}{2} = \{\text{Utbrytning av } p+1\} = \\ &= \frac{(p+1)(p+2)}{2}, \end{aligned}$$

som ju är högra ledet i det vi vill komma fram till. Alltså har vi också klarat av induktionssteg och induktionsprincipen ger därför att formeln stämmer för alla heltal $n \geq 1$.

Exempel 1.3 *Visa att 3 delar $n^3 - n$ för alla heltal $n \geq 0$.*

1) När $n = 0$ är påståendet att 3 delar 0, vilket är riktigt eftersom $0 = 3 \cdot 0$.

2) Antag nu att 3 delar $p^3 - p$, där $p \geq 0$, dvs att

$$p^3 - p = 3a,$$

för något heltal a . Vi ska visa att även $(p+1)^3 - (p+1)$ då är en multipel av 3 (samma sak som att det är delbart med 3). Vi har

$$\begin{aligned} (p+1)^3 - (p+1) &= \{\text{Utveckling med Pascals triangel}\} = \\ &= p^3 + 3p^2 + 3p + 1 - (p+1) = \{\text{Omgruppering och utbrytning av 3}\} = \\ &= p^3 - p + 3(p^2 + p) = \{\text{Induktionsantagandet}\} = \\ &= 3a + 3(p^2 + p) = 3(a + p^2 + p), \end{aligned}$$

så vi har sett att även $(p+1)^3 - (p+1)$ då är en multipel av 3.

Exempel 1.4 En följd av tal $a_0, a_1, a_2, \dots$ bestäms av att $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, och $a_n = (a_{n-2} - 2a_{n-1})/3$, när $n \geq 2$. Visa följande formel:

$$a_n = \frac{1}{2} \left((-1)^{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}} \right), \text{ när } n \geq 0.$$

Innan vi börjar beviset observerar vi att när $n \geq 2$ bestäms talet a_n av de två omedelbart föregående talen i följden. Det är en tredjedel av skillnaden mellan talet två steg tidigare (a_{n-2}) och fördubblingen av det tidigare talet ($2a_{n-1}$). Vår följd av tal är alltså (räkna själv!)

$$1, 1, -1/3, 5/3^2, -13/3^3, \dots$$

Vi inser också att induktionssteget kommer att bli svårt att genomföra; vi behöver inte bara veta att formeln stämmer när $n = p$, utan även när $n = p - 1$, eftersom a_{p+1} bestäms av a_p och a_{p-1} . Vi måste här förutsätta att $p \geq 1$, eftersom a_{-1} saknar mening. För att genomföra bassteget kommer det alltså inte att räcka att kontrollera formeln för a_0 utan vi måste också kontrollera att den stämmer för a_1 . Vi ska använda följande variation av induktionsprincipen:

Låt $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ vara en följd av påståenden sådan att

- 1) P_0 och P_1 är riktiga,
- 2) för varje $p \geq 1$ är påståendet P_{p+1} riktigt om alla påståenden P_n , där $0 \leq n \leq p$, är det.

Då är alla påståenden P_n för $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ sanna.

I vårt fall är P_n påståendet

$$a_n = \frac{1}{2} \left((-1)^{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}} \right), \text{ när } n \geq 0.$$

Bevis (Med induktion.)

- 1) Vi har $a_0 = 1$ och $a_1 = 1$ enligt talföljdens definition. Högra ledet i P_0 och P_1 är $((-1)^{-1} + 3)/2 = 1$ respektive $(1 + 1)/2 = 1$, så formeln stämmer när $n = 0$ och när $n = 1$.
- 2) Antag nu att $p \geq 1$ och att formeln stämmer när $0 \leq n \leq p$. Speciellt har vi då att

$$a_{p-1} = \frac{1}{2} \left((-1)^{p-2} + \frac{1}{3^{p-2}} \right)$$

och

$$a_p = \frac{1}{2} \left((-1)^{p-1} + \frac{1}{3^{p-1}} \right).$$

Vi har då

$$\begin{aligned} a_{p+1} &= \{\text{Enligt följdens definition}\} = \frac{1}{3}(a_{p-1} - 2a_p) = \\ &= \{\text{Enligt induktionsantagandet}\} = \frac{1}{2 \cdot 3} \left((-1)^{p-2} + \frac{1}{3^{p-2}} - 2 \left((-1)^{p-1} + \frac{1}{3^{p-1}} \right) \right) = \\ &= \{(-1)^{p-1} = -(-1)^p, (-1)^{p-2} = (-1)^p, 1/3^{p-2} = 3/3^{p-1}\} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} \left(3(-1)^p + \frac{1}{3^{p-1}} \right) = \{\text{Multiplicera in } 1/3\} = \\ &= \frac{1}{2} \left((-1)^p + \frac{1}{3^p} \right), \end{aligned}$$

som är formeln när $n = p + 1$.

Enligt induktionsprincipen är formeln nu giltig för alla $n \geq 0$.

1.1 Övningsuppgifter

1. Vi vet att

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- (a) Visa att

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

- (b) I analogi med de två föregående formlerna skulle man kunna hoppas på att

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Stämmer denna formel?

2. Bevisa med induktion att om vi har en följd av tal $a_1, a_2, \dots$ där $a_1 = 1$ och $a_n = 4a_{n-1}$ för $n = 2, 3, \dots$ så gäller $a_n = 4^{n-1}$ för alla positiva heltal n .

3. Ge ett induktionsbevis för att

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

4. Betrakta likheten $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2 + a$.

- (a) Visa att **om** likheten gäller för ett n -värde, säg $n = p$, så gäller den också för $n = p+1$.

- (b) Följer därav att likheten är bevisad med induktion?

- (c) Finns det något värde på a för vilket likheten gäller?

5. Visa med hjälp av induktion att $2n^3 + n$ är delbart med 3 för varje naturligt tal n .

6. Visa med induktion att om a är ett tal skilt från 1 så gäller

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

för $n = 0, 1, \dots$

7. Gör ett induktionsbevis för likheten

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

för $n = 1, 2, \dots$

8. Försök att utnyttja likheten

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

till att ge ett annat bevis för likheten i föregående uppgift.

9. Visa att

$$\sum_{i=1}^n i \cdot i! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

10. En följd av tal definieras genom att $a_0 = 7$, $a_1 = -2$, $a_2 = 18$, och $a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$, när $n \geq 3$. Visa att

$$a_n = (n+1)2^n + 6(-1)^n,$$

för alla heltal $n \geq 0$.

2 Mängder och påståenden

Detta avsnitt handlar om påståenden, mängder och sambandet mellan dem.

2.1 Mängder

En **mängd** är en samling objekt som kallas **element** i mängden. För att definiera en mängd måste man ange vilka element den har. Ett sätt att göra det är att räkna upp alla elementen i mängden. Man betecknar mängder med hjälp av klamrar där man mellan dessa på något sätt anger vilka element mängden skall ha. Exempelvis är

$$M = \{1, 3, 4\}$$

en mängd vars element är talen 1, 3 och 4. Det finns andra sätt att beskriva mängden. Vi kan t.ex. observera att talen 1, 3 och 4 är nollställena till polynomet $f(x) = (x-1)(x-3)(x-4)$ och skriva mängden

$$M = \{x \mid f(x) = 0\}.$$

Detta skall då utläsas som

“Mängden av alla x sådana att $f(x) = 0$ ”.

I detta sammanhang skall alltså “ $\mid$ ” tolkas som “sådana att” eller “med egenskapen att”.

Betraktar man mängden $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ är det ju egentligen inte klart vilka element som “ $\dots$ ” står för, även om man väl gissar att mängden består av alla kvadrater. För att klargöra detta kan man skriva mängden så här

$$\{n^2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$$

En mängd som skrivs $\{0, 2, 6, 12, 20, \dots\}$ borde vålla större problem om man inte explicit anger hur elementen uppkommer. Den mängd jag här tänkt på är

$$\{n(n-1) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$$

Skriven på denna form kan man ju lätt fortsätta uppräknandet av element.

För att ange att ett objekt är ett element i en viss mängd används symbolen $\in$ medan $\notin$ betecknar att objektet inte är ett element i mängden. För vår tidigare mängd $M = \{1, 3, 4\}$ har vi alltså att

$$1 \in M \text{ medan } 2 \notin M.$$

Två mängder M och N är **lika** om de har precis samma element. Detta skrivs också $M = N$. Exempelvis är $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2, 1\}$ eftersom båda mängderna innehåller precis elementen 1, 2, och 3.

En **delmängd** av en mängd M är en mängd vars alla element också ligger i M . Med samma exempel som ovan är således $D = \{1, 4\}$ en delmängd av $M = \{1, 3, 4\}$ medan $E = \{1, 5\}$ inte är det eftersom 5 tillhör E men inte M . Att D är en delmängd av M skriver vi $D \subset M$. Ibland skrivs detta också $D \subseteq M$.

Man inför också en mängd utan element. Den betecknas $\emptyset$ och kallas den **tomma mängden**.

I de flesta användningar är det naturligt att använda en **grundmängd** (eller **universalmängd**) som innehåller de objekt som är av intresse att behandla. Om vi exempelvis beskriver vår favoritmängd M som

$$M = \{x \mid (x-1)(x-3)(x-4) = 0\}$$

så verkar det inte särskilt relevant att fråga sig om I-linjen på Chalmers tillhör mängden eller ej. Å andra sidan är det ju inte heller riktigt klart, som vi skrivit, vilka tal vi skall undersöka. Naturliga tal, reella tal, komplexa tal? Låt oss anta att vi är i ett sammanhang där vi i övrigt bara behandlar hela tal. Då är det rimligt att ange det i definitionen av M så att den skrivs

$$M = \{\text{heltal } x \mid (x-1)(x-3)(x-4) = 0\}.$$

Vi kan då säga att vi arbetar med de hela talen som grundmängd G och kan med detta G skriva mängden M som

$$M = \{x \in G \mid (x-1)(x-3)(x-4) = 0\}.$$

När vi arbetar i en grundmängd kan det också vara meningsfullt att betrakta den mängd som består av alla element i grundmängden vilka inte ligger i M . Denna mängd kallas **komplementet** till M och betecknas här $\sim M$, men observera att den är beroende av vilken grundmängd man arbetar med. I vårt exempel har vi

$$\sim M = \{\text{heltal } x \mid (x-1)(x-3)(x-4) \neq 0\}.$$

Om vi istället väljer de reella talen som grundmängd har vi

$$\sim M = \{\text{reellt tal } x \mid (x-1)(x-3)(x-4) \neq 0\}.$$

I det första fallet har vi $1/2 \notin \sim M$, i det andra har vi däremot $1/2 \in \sim M$.

Vanliga beteckningar för några vanliga grundmängder är

N	de naturliga talen
Z	de hela talen
Q	de rationella talen
R	de reella talen
C	de komplexa talen

De naturliga talen är alla heltal ≥ 0 , så att $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. De rationella talen är alla tal som kan skrivas som kvot mellan två heltal (där nämnaren inte är noll). Vi har alltså

$$\mathbf{Q} = \{a/b \mid a \text{ och } b \neq 0 \text{ heltal}\}.$$

Tyvärr råder det lite förvirring kring vilka tal som egentligen ingår i de "naturliga talen". I många sammanhang är $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ medan i andra nollan inte är tillåten. Vi låter i vår kurs, som i gymnasiet, nollan finnas med bland de naturliga talen, men när du kommer till en annan kurs är det bäst att kontrollera om 0 betraktas som ett naturligt tal eller ej.

I samband med mängder finns två operationer som man bör känna till. Vi antar att A och B är två mängder. Då är

Unionen $A \cup B$ den mängd som består av alla element som ligger i *minst en* av mängderna A och B .

Snittet $A \cap B$ den mängd som består av alla element som ligger i *båda* mängderna A och B .

Om $A \cap B = \emptyset$ kallas mängderna **disjunkta**.

Exempel 2.1 *Låt*

$$A = \{1, 3, 4\} \text{ och } B = \{-1, 1, 4, 6\}.$$

Då är

$$A \cup B = \{-1, 1, 3, 4, 6\} \text{ och } A \cap B = \{1, 4\}.$$

Mer om mängder finns i övningarna.

2.2 Påståenden

Låt oss betrakta följande tre yttranden:

- $1+1$ är 2
- $1+1$ är 3

- 0.001 är litet

Av dessa är det första sant, det andra falskt medan det tredje inte går att avgöra om man inte först preciserar vad "litet" skall betyda. Med detta som bakgrund gör vi definitionen att

ett påståendet är ett yttrande av sådan form att det antingen är sant eller falskt.

Om vi har två påståenden p och q kan vi bilda två nya:

$p \vee q$ som står för p **eller** q , där vårt "eller" inkluderar möjligheten att både p och q gäller.

$p \wedge q$ som står för p **och** q .

Exempel 2.2 Låt p och q vara följande påståenden

p : Idag är det fredag.
 q : Idag är det den 24 december.

Då är

$p \vee q$ påståendet att det idag är antingen är fredag eller den 24 december eller bådaddera.

$p \wedge q$ påståendet att det idag är fredag och det är den 24 december.

För ett påstående p har vi också **negationen** av det, som vi här betecknar $\sim p$.

Många av de påståenden man möter i matematiken är yttranden om variabler. Riktigheten i dessa påståenden kan inte alltid avgöras förrän variabeln har fått ett värde. Denna typ av påståenden brukar kallas **öppna**. Låt till exempel $p(x)$ vara följande påstående om reella tal, där vi skriver $p(x)$ för att markera att påståendet beror på en variabel x .

$$p(x): x^2 \leq 1$$

Detta påstående är alltså sant om x ligger i intervallet $[-1, 1]$ och falsk annars. Man säger då att detta intervall är sanningsmängden för påståendet. Rent allmänt kan man alltså för varje påstående $p(x)$ om element x i en grundmängd G definiera **sanningsmängden**

$$S_p = \{x \in G \mid p(x) \text{ sann}\}.$$

I samband med våra operationer **eller**, **och** och **negation** kan vi se att vi har följande koppling till mängdoperationer:

$$S_{p \vee q} = S_p \cup S_q$$

$$S_{p \wedge q} = S_p \cap S_q$$

och

$$S_{(\sim p)} = \sim S_p.$$

2.3 Implikationer och ekvivalenser

Antag att vi har två påståenden p och q . Påståendet **om** p **så** q kallas en **implikation** (p implicerar q) och skrivs $p \Rightarrow q$. Den skall alltså tolkas som att om p är sann så är också q sann. Samma implikation kan också skrivas $q \Leftarrow p$ (observera ordningen).

Vi säger att två påståenden är **ekvivalenta** om vi har både $p \Rightarrow q$ och $p \Leftarrow q$ och skriver detta $p \Leftrightarrow q$.

Om våra påståenden innehåller variabler tolkas $p(x) \Rightarrow q(x)$, som att varje värde på x som gör $p(x)$ sann också gör $q(x)$ sann. På samma vis är $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ påståendet att $p(x)$ och $q(x)$ är sanna för precis samma värden på x .

Exempel 2.3 Låt oss betrakta följande tre påståenden om en variabel x som är ett reellt tal.

$$\begin{aligned}p(x) &: x < 0 \\q(x) &: x < 1 \\r(x) &: x - 1 < 0\end{aligned}$$

För dessa har vi

$$p(x) \Rightarrow q(x) \text{ och } q(x) \Leftrightarrow r(x).$$

Allmänt gäller följande koppling till mängder:

$$p(x) \Rightarrow q(x) \text{ är ekvivalent med att } S_p \subset S_q$$

och

$$p(x) \Leftrightarrow q(x) \text{ är ekvivalent med att } S_p = S_q$$

Avslutningsvis bör det påpekas att det finns ett otal språkliga formuleringar med samma logiska innehåll. T.ex.

$p \wedge q$: p och q , p men q .

$p \Rightarrow q$: om p så q , q om p , p bara om q , q är ett nödvändigt villkor för p , p är ett tillräckligt villkor för q .

$p \Leftrightarrow q$: p är ekvivalent med q , q om och endast om p , q precis när p , q är ett nödvändigt och tillräckligt villkor för p .

Frasen **om och endast om** skrivs ibland **omm**.

2.4 Övningsuppgifter

1. I texten bör man kunna urskilja några olika sätt att definiera mängder.

- (a) Beskriv de olika sätten.
- (b) Ge exempel på var och ett av sätten.
- (c) Hitta på en mängd som du kan beskriva på de olika sätten.

2. (a) Beskriv följande mängd genom att "räkna upp" elementen

$$M_1 = \left\{ \frac{n-1}{2n-1} \mid n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Man måste ange så många element i mängden att läsaren kan gissa hur fortsättningen ser ut.

(b) Hur kan ?? nedan skrivas för att

$$M_2 = \left\{ \frac{n+7}{2n+15} \mid n = ?? \right\}$$

skall vara samma mängd som M_1 ?

(c) Hur skall ?? nedan skrivas för att

$$M_3 = \{ ?? \mid n = 3, 4, \dots \}$$

skall vara samma mängd som M_1 ?

3. Betrakta grundmängden G som består av alfabetets första sju bokstäver, dvs $G = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Betrakta också de två mängderna $A = \{a, c, e\}$ och $B = \{b, c, d, e\}$. Ange elementen i var och en av följande mängder.

(a) $A \cup B$

- (b) $A \cap B$
 - (c) $\sim A$ (komplementet till A)
 - (d) $A \sim B$ dvs $A \cap (\sim B)$
 - (e) $(\sim A) \cap (\sim B)$
 - (f) $(\sim A) \cup (\sim B)$
4. Betrakta nu två godtyckliga mängder A och B i en grundmängd G . Illustrera i figurer operationerna
- (a) $A \cup B$
 - (b) $A \cap B$
 - (c) $\sim A$ (komplementet till A)
 - (d) $A \sim B = A \cap (\sim B)$
 - (e) $(\sim A) \cap (\sim B)$
 - (f) $(\sim A) \cup (\sim B)$
5. Försök att utnyttja figurerna i föregående uppgift för att uttrycka $(\sim A) \cap (\sim B)$ och $(\sim A) \cup (\sim B)$ på annat sätt.
6. Betrakta likheten $A \cup B = (A \sim B) \cup (A \cap B) \cup (B \sim A)$. Illustrera likheten med en figur.
7. Hur många element innehåller de tre mängderna $M_1 = \emptyset$, $M_2 = \{\emptyset\}$ respektive $M_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?
8. (a) Hitta på påståenden p och q så att $p \Rightarrow q$.
 (b) Samma fast nu med $p \Leftarrow q$.
 (c) Samma fast nu med $p \Leftrightarrow q$.
9. Skriv följande nya påståenden med implikations- eller ekvivalenspilars. Vi tänker oss att p och q är två påståenden.
- (a) Om q , så p .
 - (b) p om q .
 - (c) p endast om q .
 - (d) p om och endast om q .
10. Här låter vi $p(x)$ vara påståendet " x är ett heltal sådant att $x^2 = 1$ ". Ange de implikationer som gäller mellan $p(x)$ och vart och ett av följande påståenden.
- (a) $q_1 : x = 1$
 - (b) $q_2 : x = -1$
 - (c) $q_3 : x = 1$ eller $x = -1$
 - (d) $q_4 : x = -1, 0$ eller 1
11. Nedan varierar x över de positiva heltalen. Bestäm vilka av följande yttranden som är (öppna) påståenden.
- (a) $5x$ är jobbigare att räkna ut än $x + x + x + x + x$.
 - (b) $x^2 > 0$
 - (c) $x^2 = -1$
 - (d) $x(x - 1) = 0$
 - (e) Är $x^2 = 4$?
12. Skriv ner negationen av följande påståenden.
- (a) Om n är ett jämnt tal > 2 , så är n summan av två primtal.
 - (b) Om punkterna P, Q och R i planet ligger på linje, så är PQR inte en triangel.

3 Bevis

Att bevisa ett påstående är att ge ett övertygande argument för att påståendet är sant. Varje vetenskaplig disciplin har sin syn på vad som är ett acceptabelt bevis. Inledande studier i matematik går till stor del ut på att lära sig vad som betraktas som *matematiskt* acceptabla bevis.

Matematisk teori är idealt uppbyggd på följande hörnstenar.

- **Primitiva begrepp**
- **Definitioner**
- **Axiom**
- **Satser**

En **definition** är ett fastslående vad ett visst begrepp skall betyda. Som exempel på en definition kan vi ta följande

“Ett primtal är ett heltal större än 1 som inte har några andra delare större än 1 än talet självt.”

Detta är alltså en definition av begreppet *primtal*. Tittar vi närmare på definitionen ser vi att den i sig innehåller några andra begrepp. Där finns begreppen *delare*, *heltal*, *större än* och *1*. Begreppet *delare* kan man ju i sin tur definiera genom

“Ett heltal b är en delare till heltalet a om det finns ett annat heltal c så att $a = bc$.”

Vi kunde sedan också börja fundera över vad som skall menas med *heltal*, *större än* och *1*. När man håller på med sådana definitioner bygger de i sin tur på begrepp som måste vara införda tidigare. För att komma igång överhuvudtaget behöver man därför ett antal begrepp som man accepterar utan att precisera innebörden av. Det kan vara begrepp som heltal, positiv, 1 och exempelvis från geometrin begreppen punkt och linje. Sådana begrepp som man i en teori accepterar utan definition är det vi kallat **primitiva begrepp**.

I analogi med *primitiva begrepp* kallar vi **axiom** ett påstående som man accepterar som sant utan motivering. Med **sats** menas ett påstående som är en logisk konsekvens av axiomen. När man skall bevisa ett påstående kan man alltså stödja sig på axiomen och tidigare bevisade satser. I praktiken funderar de flesta som sysslar med matematik inte särskilt mycket på axiomen utan stöder sig på tidigare bevisade satser. Så är det också de matematikkurser du kommer att läsa. Oftast får man då bara en informell avstämning av vilka satser och begrepp den teori man läser verkligen startar på. Det gör det svårt att tala om exakt hur ett bevis skall se ut. Det är konventioner som avgör hur mycket som behöver bevisas i ett visst sammanhang. När man läser en kurs får man alltså försöka hitta konventionen för bevisen i just den kursen, så att man ser vad som accepteras utan bevis och vad som behöver visas.

Trots vad som skrivits här kan man i varje fall särskilja tre olika typer av bevis

- **Direkt bevis**
- **Indirekta bevis**
- **Motsägelsebevis**

När vi går över till att titta på de två första typerna av bevis kan man observera att många satser är uppbyggda på formen

Antag att F (*förutsättningar*).
Då gäller S (*slutsats*).

Detta innebär alltså att satser ofta kan formuleras som implikationer

$$F \Rightarrow S$$

3.1 Direkt bevis

Som namnet antyder får man här slutsatsen ur förutsättningarna genom en sekvens av implikationer

$$F \Rightarrow S_1 \Rightarrow S_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow S.$$

Uppläggningsen är alltså att man antar att förutsättningarna F är uppfyllda och drar med hjälp av detta och tidigare visade resultat olika slutsatser som slutligen leder fram till den önskade S .

Exempel 3.1 *Betrakta följande sats*

“Antag att x är ett reellt tal $\neq 4$. Om $\frac{2x-5}{x-4} = 3$ så är $x = 7$.”

Här kan man observera att vi som grundförutsättning har att x är ett reellt tal $\neq 4$. I våra tidigare beteckningar är alltså förutsättningarna

$$F: x \text{ är ett reellt tal } \neq 4 \text{ och } \frac{2x-5}{x-4} = 3.$$

medan slutsatsen är

$$S: x = 7$$

Ett typiskt bevis skulle kunna se ut så här.

Antag att x är ett reellt tal $\neq 4$ och $\frac{2x-5}{x-4} = 3$. Av likheten $\frac{2x-5}{x-4} = 3$ följer

$$2x - 5 = 3(x - 4)$$

det vill säga

$$2x - 5 = 3x - 12$$

som ger

$$12 - 5 = 3x - 2x$$

och alltså $x = 7$.

Analyserar vi detta resonemang så ser vi att det består av ett antal implikationer. Vi har först

$$F \Rightarrow 2x - 5 = 3(x - 4)$$

och sedan

$$[2x - 5 = 3(x - 4)] \Rightarrow [2x - 5 = 3x - 12]$$

därefter

$$[2x - 5 = 3x - 12] \Rightarrow [12 - 5 = 3x - 2x]$$

och slutligen

$$[12 - 5 = 3x - 2x] \Rightarrow [x = 7] \text{ (som ju är slutsatsen } S.)$$

3.2 Indirekt bevis

För att visa riktigheten av $F \Rightarrow S$ kan man visa att om S *inte* gäller, så kan heller inte F gälla. Detta angreppssätt kallas att visa implikationen indirekt och bygger på att implikationerna

$$F \Rightarrow S$$

och

$$(\sim S) \Rightarrow (\sim F)$$

är ekvivalenta. Ibland kan den ena av dessa implikationer vara lättare att visa än den andra.

Exempel 3.2 *Vi vill visa följande resultat.*

“Antag att x är ett reellt tal sådant att $x \neq 4$. Om $x \neq 7$ så gäller $\frac{2x-5}{x-4} \neq 3$.”

Villkoret $x \neq 4$ är ju till för att kvoten $\frac{2x-5}{x-4}$ överhuvudtaget skall existera så hela resultatet är ett påstående om sådana x som är reella tal $\neq 4$.

Att räkna med “=” är oftast enklare än “ $\neq$ ” så vi använder att

$$x \neq 7 \Rightarrow \frac{2x-5}{x-4} \neq 3$$

är logiskt ekvivalent med att

$$\frac{2x-5}{x-4} = 3 \Rightarrow x = 7.$$

Denna implikation visade vi i exemplet om direkta bevis.

För att bevisa att om $x \neq 7$ så är $\frac{2x-5}{x-4} \neq 3$ visade vi alltså att om vi skulle ha $\frac{2x-5}{x-4} = 3$ så måste $x = 7$. Eftersom vi förutsatt att $x \neq 7$ kan vi alltså inte ha $\frac{2x-5}{x-4} = 3$.

3.3 Motsägelsebevis

Ett **motsägelsebevis** för ett påstående

$$F \Rightarrow S$$

är ett bevis där man argumenterar för att om F och $\sim S$ är sanna samtidigt, så leder detta till en motsägelse. Om F är riktigt, så kan i så fall inte $\sim S$ vara det, och alltså måste S vara korrekt.

I motsägelse bevis visar man alltså $F \Rightarrow S$ genom att i stället visa att

$$(F \vee \sim S) \Rightarrow (R \vee \sim R),$$

där R är något påstående.

Det bör påpekas att även om en klar majoritet av matematiker accepterar motsägelsebevis, så finns det trots allt de som inte gör det. Deras invändning är att man inte av felaktigheten hos $\sim S$ kan dra slutsatsen att S är riktigt; det skulle kunna vara så att det är helt omöjligt att avgöra om S gäller eller ej. Detta bottnar i vår något vaga definition av ett påstående som något som man (i princip) kan avgöra om det är sant eller ej. Ett exempel på ett problematiskt påstående är S : *Nu ljugar jag*. En stunds funderande ger att om S är sant så är S falskt och vice versa. Även om S intuitivt känns som ett påstående är det alltså inte det enligt vår definition. De klenrogna hävdar att samma villfarelse kan gälla andra “påståenden” i matematiken.

Motsägelsebevis används ibland också för att visa påståenden P på ett indirekt vis. Man visar då att $\sim P$ leder till en motsägelse. Då kan inte $\sim P$ vara sant, så P måste då gälla. Man visar alltså P genom att i stället visa att

$$\sim P \Rightarrow (R \vee \sim R),$$

där R är något påstående.

Vi ger två exempel på sådana bevis hämtade från talteorin. För att förstå exemplen bör man komma känna till en del egenskaper från talteorin. Bland annat behöver vi acceptera följande resultat

- Om en produkt ab av två hela tal a och b är delbar med ett primtal p så är antingen a eller b delbart med p .
- Varje heltal > 1 som inte självt är ett primtal kan skrivas som en produkt av primtal. Framställningen är entydig om man bortser från ordningsföljden. **Aritmetikens fundamentalsats.**

Nu till de två exemplen på motsägelsebevis.

Exempel 3.3 $\sqrt{2}$ är irrationellt.

Bevis Det bevis vi ger är alltså ett motsägelsebevis. Låt P vara påståendet $P : \sqrt{2}$ är irrationellt. Vi antar att $\sim P$ är riktigt och visar att vi därigenom kommer fram till en motsägelse ($R \vee \sim R$). Detta leder oss till slutsatsen att antagandet ($\sim P$) är falskt. Alltså måste P vara sant.

Antag alltså att det finns ett rationellt tal x så att $x^2 = 2$. Detta tal kan vi då skriva $x = p/q$ där p och $q \neq 0$ är heltal. Efter förkortning kan vi komma fram till att R : talen p och q har 1 som största gemensam delare.

Genom att sätta in i ekvationen ser vi att

$$p^2 = 2q^2.$$

Eftersom 2 är ett primtal leder detta (enligt det första av de grundläggande resultaten) till att 2 delar p dvs p är av formen $p = 2p_1$ för något heltal p_1 . Vi ersätter p med $2p_1$ i likheten ovan och får

$$4p_1^2 = 2q^2 \text{ dvs } 2p_1^2 = q^2.$$

Men denna likhet leder till att även q är delbart med 2. Detta ger oss $\sim R$. Vi har därmed kommit fram till att $\sim P$ leder till $R \vee \sim R$, som är en motsägelse och tvingas dra slutsatsen att vårt antagande ($\sim P$) är omöjligt. Det finns alltså inget rationellt x så att $x^2 = 2$.

Nästa exempel är klassiskt bevis för ett klassiskt resultat av Euklides.

Exempel 3.4 *Det finns oändligt många primtal*

Bevis Vi gör alltså ett motsägelsebevis och antar därför att det bara finns ändligt många primtal ($\sim P$), säg N stycken. Låt oss införa beteckningarna $p_1, p_2, \dots, p_N$ för dem. Bilda sedan talet

$$a = 1 + p_1 p_2 \dots p_N,$$

som är > 1 . Detta tal är konstruerat så att inget av primtalen $p_1, p_2, \dots, p_N$ delar talet a . I så fall skulle nämligen $a - p_1 p_2 \dots p_N$ också vara delbart med detta primtal, vilket är omöjligt eftersom $a - p_1 p_2 \dots p_N = 1$. Vi har alltså kommit fram till $R : a > 1$ är inte delbart med något primtal.

Men enligt aritmetikens fundamentalsats är ju a antingen självt ett primtal eller produkt av sådana och därför gäller $\sim R : a > 1$ är delbart med något primtal.

Vår slutsats blir att antalet primtal inte kan vara ändligt och därför finns det oändligt många sådana tal.

3.4 Motexempel

Avsnitten ovan har handlat om olika strategier för att bevisa olika påståenden. Eftersom inte alla påståenden är sanna kan man ju fråga sig hur man skall bevisa att ett påstående falskt. Någon generalmetod för detta finns förstås inte, men ibland kan en metod vara att man försöker ge ett motexempel. Detta skall vara ett exempel där förutsättningarna är uppfyllda men den påstådda slutsatsen är falsk. Vi illustrerar med några exempel.

Exempel 3.5 *Motbevisa följande påstående.*

“Om n är ett positivt heltal så gäller $2^n \geq n^2$.”

För att visa att påståendet är falskt räcker det att hitta *ett enda* positivt heltal n sådant att $2^n < n^2$. Genom att pröva några värden finner vi att $2^3 < 3^2$. Olikheten gäller alltså inte för $n = 3$. Påståendet är därför inte sant.

I själva verket är $n = 3$ det enda motexemplet till olikheten, så följande snarlika påstående är sant.

“Om n är ett positivt heltal **större än 3** så gäller $2^n \geq n^2$.”

Exempel 3.6 Visa att följande påstående är falskt.

“Varje heltal större än 3 kan entydigt, sånär som på ordningen, skrivas som en summa av två, eventuellt lika, primtal.”

I detta påstående ingår flera delpåståenden. Dels att varje heltal kan skrivas som en summa av två primtal, dels att dessa två primtal är entydigt bestämda om man bortser från i vilken ordning man skriver termerna. Exempelvis är $5=2+3$ men också $5=3+2$. I båda uppdelningarna är primtalen 2 och 3 så dessa uppdelningar skall vi inte skilja på.

För att motbevisa det ursprungliga påståendet räcker det att motbevisa något av delpåståendena. Entydigheten kan vi motbevisa exempelvis genom att se att $10=3+7$ men också $10=5+5$. Eftersom 3, 5 och 7 alla är primtal har vi motbevisat entydigheten och därmed hela påståendet.

3.5 Övningsuppgifter

1. Skriv med lämpliga pilar ut relationerna mellan raderna i följande:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 4 \\ x^2 & = & 16 \\ x & = & \pm 4 \end{array}$$

2. Samma uppgift för

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 3x + 2 & = & 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2x & = & 0 \\ x(x-1)(x-2) & = & 0 \\ x & = & 0, 1 \text{ eller } 2 \end{array}$$

3. Hitta ett motexempel till var och en av följande påståenden.

- (a) Om n är ett positivt heltal så gäller

$$2n^2 + n = n^3 - n^2 + 3n$$

- (b) Om n är ett primtal så har 12 och $n^3 - n^2 + 3n$ en gemensam faktor.

4. Konstruera direkta bevis för var och en av följande påståenden.

- (a) Om m och n är två jämna tal så är också summan jämn. (Ledning: Ett tal kallas n jämnt om det är av formen $2k$, där k är ett heltal.)
- (b) Om m och n är jämna så är mn också jämnt.
- (c) Om m är jämnt och n är udda så är $m+n$ udda.
- (d) Om m är jämnt och n är udda så är mn jämnt.

5. Avgör om följande påstående är sann eller falsk:

“Om n är ett heltal så att $4n - 8$ är delbart med 12 så är också $n - 2$ delbart med 12”.

Bevisa eller motbevisa.

4 Svar till vissa uppgifter

Kapitel 1 1. (b) Ja

4. (b) Nej (c) Ja, $a = 0$

Kapitel 2 2. (a) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots$ (b) $n = -7, -6, \dots$ (c) $?? = \frac{n-3}{2n-5}$

3. (a) $\{a, b, c, d, e\}$ (b) $\{c, e\}$ (c) $\{b, d, f, g\}$ (d) $\{a\}$ (e) $\{f, g\}$ (f) $\{a, b, d, f, g\}$

5. $\sim (A \cup B)$ respektive $\sim (A \cap B)$

7. 0, 1, 2

9. (a) $q \Rightarrow p$ (b) $q \Rightarrow p$ (c) $p \Rightarrow q$ (d) $p \Leftrightarrow q$

10. (a) $q_1 \Rightarrow p$ (b) $q_2 \Rightarrow p$ (c) $q_3 \Leftrightarrow p$ (d) $p \Rightarrow q_4$

11. b,c,d

12. (a) Det finns ett jämnt tal $n > 2$ som inte är summan av två primtal.
(b) Det finns P, Q och R vilka ligger på en rät linje så att PQR är en triangel.

Kapitel 2

1. $x = 4 \Rightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$

2. $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1$ eller 2

3. (a) $T \text{ ex } n = 3$ (b) $T \text{ ex } n = 5$

4. Om m och n är jämna så är $m = 2a$ och $n = 2b$ för några heltal. Detta ger $m + n = 2(a + b)$ och $mn = 2(2ab)$, så båda är jämna.

Om m är jämnt och n udda, så är $m = 2a$ och $n = 2b + 1$ för några heltal. Detta ger $m + n = 2(a + b) + 1$ och $mn = 2(a(2b + 1))$, så det första är udda medan det andra är jämnt.

5. Falsk

6. (d) $A \Leftarrow B$