

Lösningar till tentamen i TMA 200
Introduktionskurs I,
den 30/8 2003, kl 8.45-12.45

1 september 2003

Uppgift 1a Beräkna $\frac{1/2-2/3}{3/4-5/6}$.

Lösning: Vi har att

$$\frac{1/2 - 2/3}{3/4 - 5/6} = \frac{3/6 - 4/6}{9/12 - 10/12} = \frac{-1/6}{-1/12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{1} = 2.$$

Uppgift 1b Lös ekvationen $4e^{-3x} = 5$.

Lösning:

$$4e^{-3x} = 5 \Leftrightarrow e^{-3x} = 5/4 \Leftrightarrow -3x = \ln(5/4) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}\ln(5/4) = \frac{1}{3}\ln(4/5).$$

Uppgift 1c Bestäm kvotpolynom $K(x)$ och restpolynom $R(x)$, då polynomet $4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ divideras med $2x^2 - 3x + 4$.

Lösning: Vi använder liggande stolen (som är svår att skriva på maskin). Först fås att $2x(2x^2 - 3x + 4) = 4x^3 - 6x^2 + 8x$. Alltså är $2x$ första termen i kvoten. Differensen mellan det ursprungliga polynomet $4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ och $4x^3 - 6x^2 + 8x$ är $3x^2 - 6x - 1$, vilket är den första resten. Vi har att $\frac{3}{2}(2x^2 - 3x + 4) = 3x^2 - 9x/2 + 6$, och differensen mellan det ursprungliga $4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ och $3x^2 - 9x/2 + 6$ är $-3x/2 - 7$, vilket är den slutliga resten (eftersom man inte kan dela den med $2x^2 - 3x + 4$). Alltså är kvoten $K(x) = 2x + 3/2$ och $R(x) = -3x/2 - 7$.

Uppgift 1d Bestäm exakta värdena för $\tan(v)$ och $\cot(v)$, om $\sin(v)=2/3$ och $0 < v < \pi/2$.

Lösning: Vi får en rätvinklig triangel där motstående katet är 2, och hypotenusan är 3. Med Pythagoras sats får vi då att den närliggande kateten är $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$. Detta ger att $\tan(v) = 2/\sqrt{5}$ och $\cot(v) = \sqrt{5}/2$.

Uppgift 2 Lös ekvationen

$$\sqrt{5x^2 + 5x - 5} - 1 = 2x.$$

Lösning: Vi flyttar över ettan till HL, och kvadrerar sedan båda sidor. Då får vi ekvationen $5x^2 + 5x - 5 = (2x + 1)^2 \Leftrightarrow 5x^2 + 5x - 5 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 6$, som har lösningen $x = -1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = (-1 \pm 5)/2$. Vi måste kolla om båda två är lösningar till den ursprungliga ekvationen, eller om vi har fått någon falsk lösning genom kvadreringen.

Insättning av $x = (-1 + 5)/2 = 2$ i VL ger $5 - 1$, och HL 4, dvs $x = 2$ är en rot till den ursprungliga ekvationen. Vi provar med $x = (-1 - 5)/2 = -3$: VL blir $5 - 1$, men HL = -6 , alltså är $x = -3$ inte en rot till den ursprungliga ekvationen.

Uppgift 3 Bestäm alla (komplexa) rötter till ekvationen $x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$.

Lösning: Genom gissning fås att en rot är $x_1 = 2$. Då har vi $x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = (x - 2)(x^2 - x + 2)$ enligt faktorsatsen. Nu vill vi alltså lösa $x^2 - x + 2 = 0$, enligt formel har vi $x_{2,3} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - 2} = (-1 \pm \sqrt{7}i)/2$.

Uppgift 4a För vilka reella tal x gäller att

$$\frac{2}{x+2} > \frac{3}{x+3}?$$

Lösning: Vi har att $\frac{2}{x+2} > \frac{3}{x+3} \Leftrightarrow \frac{2(x+3)-3(x+2)}{(x+2)(x+3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x+2)(x+3)} > 0$. Funktionen $f(x) = \frac{x}{(x+2)(x+3)}$ är alltså noll då $x = 0$, och är ej definierad då $x = -2$ och $x = -3$. Vi behöver kolla tecknet i intervallen $x < -3$, $-3 < x < -2$, $-2 < x < 0$ och $x > 0$. Om $x < -3$ är alla faktorer negativa, och $f(x) < 0$. Om $-3 < x < -2$ är $(x+3) > 0$ och de övriga faktorerna negativa. Resultatet blir att $f(x) > 0$. Om $-2 < x < 0$ blir faktorerna i nämnaren positiva, men täljaren negativ, alltså är $f(x) < 0$. Om $x > 0$ är alla faktorer positiva och $f(x) > 0$. Svaret är alltså att olikheten är uppfylld då $x < -3$ eller $-2 < x < 0$.

Uppgift 4b För vilka reella tal x gäller att $\ln(8-x) = \ln(8) - \ln(x)$?

Lösning: För det första måste $(8 - x) > 0$ för att $\ln(8 - x)$ skall vara definierat, dvs $x < 8$. Dessutom måste $x > 0$ för att $\ln(x)$ skall vara definierat. Totalt är vi alltså intresserade av x som uppfyller $0 < x < 8$.

Nu har vi att $\ln(8 - x) = \ln(8) - \ln(x) \Leftrightarrow \ln(8 - x) = \ln(8/x)$, vilket ger att $8 - x = 8/x$, eller $x(8 - x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 = 0$. Detta är en andragradsekvation med lösningarna $x = 4 \pm \sqrt{16 - 8} = 4 \pm 2\sqrt{2}$. Båda dessa lösningar ligger i det tillåtna intervallet, och är alltså lösningar till den ursprungliga ekvationen.

Uppgift 5a I en triangel är två av sidorna 4 och 5 längdenheter, och den mellanliggande vinkeln är 120deg. Beräkna längden av den tredje sidan.

Lösning: Vi använder cosinussatsen. Den sökta sidan är finns i VL i cosinussatsen, och är alltså lika med $\sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos(120)}$. Vi vet genom spegling i y-axeln att $\cos(120) = -\cos(60) = -1/2$, alltså är den sökta sidan $\sqrt{16 + 25 + 40 \cdot 1/2} = \sqrt{61}$.

Uppgift 5b Beräkna arean av triangeln ovan.

Lösning: Enligt areasatsen ges arean av $(4 \cdot 5 \cdot \sin(120))/2$. Genom spegling i y-axeln ser vi att $\sin(120) = \sin(60) = \sqrt{3}/2$, alltså är arean $(20 \cdot \sin(60))/2 = 10 \cdot \sqrt{3}/2 = 5\sqrt{3}$.

Uppgift 6 Visa att

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$$

för alla heltal $n \geq 1$.

Lösning: Vi löser uppgiften med induktion. Basfallet är då $n = 1$. I så fall är VL = $\frac{1}{3}$, och HL = $\frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{1}{3}$. Alltså är påståendet sant då $n = 1$. Antag nu att det är sant för ett godtyckligt n . Vi skall visa att då följer det att påståendet är sant för $n + 1$. Vi har att

$$VL = \frac{1}{3} + \dots + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

enligt induktionsantagandet. Nu är

$$\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{3(2n+3)}{4 \cdot 3^{n+1}} + \frac{4(n+1)}{4 \cdot 3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+3}{4 \cdot 3^{n+1}}$$

, vilket är precis vad vi ville visa.

Uppgift 7 Två cirklar, som båda har radien R (och ligger i samma plan), skär varandra, så att medelpunkten för den ena cirkeln ligger på periferin för den andra. Beräkna arean av det område (snittmängden), som ligger innanför båda cirkelarna.

Lösning: Kalla cirkelarnas medelpunkter A och B , och deras skärningspunkter P och Q . Då är trianglarna ABP och ABQ liksidiga, och alla vinklar i dessa trianglar är alltså 60 grader. Vi kan dela upp snittmängden i två lika delar genom linjen mellan P och Q . Arean av en av dessa ges av att ta cirkelsektorn från P till Q i triangeln med medelpunkt A , och sedan dra ifrån arean av triangeln APQ . Cirkelsektorn är en tredjedel av hela cirkelns area, alltså $\pi R^2/3$, och triangelns area är $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}R \cdot R/2 = \sqrt{3}R^2/4$ (eftersom man får genom t ex Pythagoras sats att dess bas är $\sqrt{3}R$). Hela snittmängden är då $2(\pi R^2/3 - \sqrt{3}R^2/4) = \frac{R^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

Uppgift 8 Bevisa eller motbevisa: Det finns ett heltal $c > 0$, så att $\sqrt{c^2 + 1}$ är rationellt.

Lösning: Antag att påståendet är sant, dvs att $\sqrt{c^2 + 1} = p/q$, där p och q inte har några gemensamma faktorer $\neq \pm 1$. I så fall är $c^2 + 1 = p^2/q^2$, dvs $q^2(c^2 + 1) = p^2$. Men p och q saknar gemensamma faktorer $\neq \pm 1$, vilket ger $q = \pm 1$, eftersom q^2 är en faktor i p^2 . Detta ger $c^2 + 1 = p^2$, eller $1 = p^2 - c^2 = (p-c)(p+c)$. Eftersom $p \pm c$ är heltal måste vi ha $1 = p+c = p-c$ eller $-1 = p+c = p-c$. Båda faller ger $c = 0$, vilket strider mot att $c > 0$. Alltså är påståendet falskt.