Lösning av TMA100Introduktionskurs i matematik I, 1p, 04 08 28

1. (a) En riktningskoefficient ges av $k = (3-5)/(-4-6) = 1/5$. Detta ger ekvationen $y = x/5 + m$. Linjen går genom $(6,5)$ och insättning av detta ger $5 = 6/5 + m$, så $m = 19/5$.
   Svar: $y = x/5 + 19/5$.

   (b) Övergång till potenser av 3 och 2 samt slutlig förkortning ger

$$\frac{4^5 \cdot 6^8}{9^3 \cdot 8^6} = \frac{2^{10} \cdot 2^8 \cdot 3^8}{3^6 \cdot 2^{18}} = 3^2 = 9.$$

   (c) $|x+4|$ är avståndet mellan x och -4 på tallinjen. Detta avstånd ska vara mellan 3 och 5. Detta gäller när $-5-4 < x < -3-4$ och när $3-4 < x < 5-4$.
   Svar: När $-9 < x < -7$ och när $-1 < x < 1$.

   (d) JAS

2. (a) Vi löser ut $\ln x$ och använder logaritmlagar:

$$\begin{aligned} \ln x &= (\ln x + 3\ln 4 - 4\ln 3)/2 = (\ln 4^3 - \ln 3^4)/2 = \\ &= (1/2)\ln(4^3/3^4) = (1/2)\ln((2^3/3^2)^2) = \ln(9/8), \end{aligned}$$

   som har (den enda) lösningen $x = 9/8$ (eftersom logaritmen är strängt växande).
   Svar:$x = 9/8$.

   (b) Omskrivning ger att vi ska lösa

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x+1} = \\ &= \frac{1-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2-x}{(x+1)(x-1)}. \end{aligned}$$

   Det rationella uttrycket växlar tecken i -1, 1, och 2. Detta ger
   Svar: $x < -1$ och $1 < x < 2$.

3. Gemensamt bråk streck i leden och överflyttning ger att vi ska lösa

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x-4}{(x-3)(x-4)} + \frac{x-3}{(x-3)(x-4)} - \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} - \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \frac{2x-7}{x^2-7x+12} - \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{(2x-7)(x^2-3x+2)-(2x-3)(x^2-7x+12)}{(x^2-7x+12)(x^2-3x+2)} = \\ &= \frac{4x^2-20x+22}{(x^2-7x+12)(x^2-3x+2)}. \end{aligned}$$

   Ekvationen är alltså ekvivalent med $0 = x^2 - 5x + 11/2$, som har lösningarna $x = 5/2 \pm \sqrt{25/4 - 22/4} = 5/2 \pm \sqrt{3}/2$.
   Svar: $x = 5/2 \pm \sqrt{3}/2$.

4. (a) Substitutionen $t = \sin x$ ger ekvationen $0 = 2t^2 + 7t + 3 = (t+3)(2t+1)$ som ger $\sin x = t = -3$ eller $\sin x = t = -1/2$. Den första saknar lösning medan den andra ger

$$x = \begin{cases} -\pi/6 + n2\pi \\ -5\pi/6 + n2\pi. \end{cases}$$

   Svar:

$$x = \begin{cases} -\pi/6 + n2\pi \\ -5\pi/6 + n2\pi. \end{cases}$$

   (b) Övergång till komplementvinkel ger $\sin(\pi/2 - 7x) + \sin 5x = 0$, eller $\sin(\pi/2 - 7x) = \sin(-5x)$, som ger

$$\begin{aligned} \pi/2 - 7x + n2\pi &= -5x \text{ eller} \\ \pi - (\pi/2 - 7x) &= -5x + n2\pi \end{aligned}$$

   Dem första ekvationen ger $x = \pi/4 + n\pi$, medan den andra ger $x = -\pi/24 - n\pi/6$.
   Svar: $x = \pi/4 + n\pi$ och $x = -\pi/24 + n\pi/6$.

5. När $n = 1$ har vi $VL_1 = \sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 1 \cdot 2$ och $HL_1 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/3 = 2$, så $VL_1 = HL_1$ stämmer.

   Antag nu att $VL_p = \sum_{i=1}^{p} i(i+1) = p(p+1)(p+2)/3$. Då gäller

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= \sum_{i+1}^{p+1} i(i+1) = \sum_{i=1}^{p} i(i+1) + (p+1)(p+2) = \\ &= p(p+1)(p+2)/3 + (p+1)(p+2) = \{ \text{ bryt ut}(p+1)(p+2)\} = (p+1)(p+2)(p/3+1) = \\ &= (p+1)(p+2)(p+3)/3 = HL_{p+1}. \end{aligned}$$

   Därmed är påståendet bevisat med induktion.

6. (a) Kvadratkomplettering ger

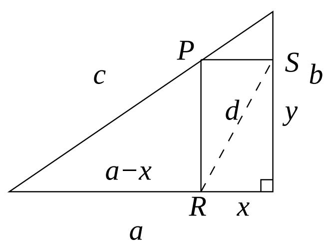
$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 - 4x - 6y + 7 = (x-2)^2 + (y-3)^2 - 6 \text{ resp} \\ 0 &= x^2 + y^2 + 3x + 5y + 7 = (x+3/2)^2 + (y+5/2)^2 - 3/2 \end{aligned}$$

   och **Svar:** Den första har medelpunkt $(2, 3)$ och radie $\sqrt{6}$, den andra har medelpunkt $(-3/2, -5/2)$ och radie $\sqrt{3/2}$.

   (b) Av medelpunkter och radier ser vi att den första cirkeln ligger i övre halvplanet medan den andra ligger i det nedre. Alltså skär inte cirklarna varandra. Om d är avståndet mellan de båda medelpunkterna är kortaste avståndet d minus summan av de båda radierna, som är $\sqrt{6} + \sqrt{3/2} = 3\sqrt{3/2}$. Vi har $d = \sqrt{(2+3/2)^2 + (3+5/2)^2} = \sqrt{170/4} = \sqrt{85/2}$.

   Svar: $\sqrt{85/2} - 3\sqrt{3/2}$.

7. Med beteckningar som i figuren



   har vi $b/a = y/(a-x)$, eller $y = (b/a)(a-x)$. Uppgiften är, enligt Pythagoras sats, att göra $d^2 = x^2 + y^2$ så litet som möjligt när x ligger mellan 0 och a. Vi har, om låter $c^2 = a^2 + b^2$,

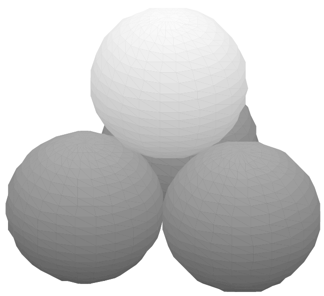
$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 + (b/a)^2(a-x)^2 = (1 + (b/a)^2)x^2 - 2(b^2/a)x + b^2 = \\ &= (c^2/a^2)(x^2 - 2(b^2a/c^2)x + b^2a^2/c^2) = \\ &= (c^2/a^2)((x - ab^2/c^2)^2 + b^2a^2/c^2 - a^2b^4/c^4), \end{aligned}$$

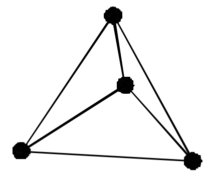
   som antar sitt minsta värde när $x = ab^2/c^2$ (som ligger mellan 0 och a, eftersom $0 < c < b$.) Det minsta värdet av d^2 är

$$(c^2/a^2)(b^2a^2/c^2 - a^2b^4/c^4) = a^2b^2/c^2.$$

   Svar: $ab/\sqrt{a^2+b^2}$.

8. De fyra kulornas medelpunkter bildar en tetraeder med alla kanter lika långa, nämligen av längd $2R$. Denna tetraeder ligger på höjd R över planet. För att svara på uppgiften räcker det att bestämma höjden h i tetraedern.





Basen är en liksidig triangel (med viklar $60°$)och höjden i tetraedern mot denna skär i triangelns tyngdpunkt. För avståndet d från ett hörn i triageln till denna punkt är $d \cos(30°) = R$, så $d = 2R/\sqrt{3}$.

Enligt Pythagoras sats är $4R^2 = h^2 + d^2$, som ger $h^2 = 8R^2/3$, och $h = R\sqrt{8/3}$.

Svar: $R + R\sqrt{8/3} = R(1 + 2\sqrt{2/3})$.