

Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Lösningar till
Tentamen i Introduktionskurs D, TMA220, 2007-09-01

1. (a) $A \cap \mathbb{Z} = \{5, 32\}$
(b) $B \cup C = \{f, l, o, d, h, ä, s, t\}$
(c) $A \cap C = \emptyset$
(d) $(B \cup C \cup A) \cap D = \{f, l, o, d, h, ä, s, t, a, r\}$
2. (a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4096} = \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{2^k}$
(b) Låt $k = n - 1$. Vi får då

$$\sum_{n=1}^{21} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{20} \frac{1}{k+2}$$

3. Ett Venn-diagram över situationen ser ut så här:

För att få ihop 30 element totalt så måste de tre okända fälten innehålla exakt 15 element och alla dessa ligger i C som därför måste innehålla exakt 15 element.

4. Vi har att $f \circ g(x) = |x - 1|^2 = (x - 1)^2$ och $g \circ f(x) = |x^2 - 1|$.

För $x \geq 1$ och $x \leq -1$ så är $g \circ f(x) = x^2 - 1$ och

$$f \circ g(x) = g \circ f(x) \iff x^2 - 2x + 1 = x^2 - 1 \iff 2x = 2 \iff x = 1.$$

För $-1 < x < 1$ så är $g \circ f(x) = 1 - x^2$ och

$$f \circ g(x) = g \circ f(x) \iff x^2 - 2x + 1 = 1 - x^2 \iff 2x^2 = 2x \iff x = 1 \vee x = 0.$$

Alltså har ekvationen lösningarna $x = 0$ och $x = 1$.

5. Alternativ a, c och e är rätt.
6. (a) Deriveringen är inte injektiv då t ex $D(1 + x) = D(x) = 1$.

- (b) Deriveringen är surjektiv, ty tag godtyckligt polynom $f(x) = a + bx \in B$. Då gäller att derivatan av (den primitiva funktionen) $ax + \frac{b}{2}x^2$ uppfyller precis

$$D(ax + \frac{b}{2}x^2) = a + 2\frac{b}{2}x = f(x).$$

- (c) Eftersom funktionen inte är injektiv så är den inte inverterbar och saknar alltså invers.

7. (a) Nej den är inte kommutativ, ty t ex $1 \star x = 1$ men $x \star 1 = x$.

- (b) Nej den är inte associativ, ty t ex

$$(1 \star x) \star x = 1 \star x = 1$$

men

$$1 \star (x \star x) = 1 \star 0 = 0.$$

- (c) En identitet $e + fx$ ska uppfylla

$$(e + fx) \star (a + bx) = a + bx \text{ och } (a + bx) \star (e + fx) = a + bx$$

för alla polynom $a + bx$. Den andra likheten ger att $af = a$ och $be = b$ för alla a och b . Dessa har den enda lösningen $e = f = 1$. Sätter man in detta i den första likheten så får man $a + bx = (1 + x) \star (a + bx) = b + ax$ och detta stämmer inte för alla $a + bx$ (utan bara då $a = b$). Alltså finns det inte någon identitet.