

Matematiska vetenskaper

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Lösningar till

Tentamen i Introduktionskurs D, TMA220, 2008-08-30

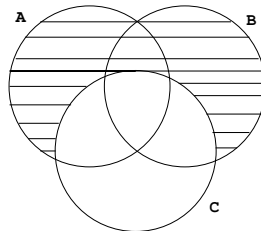
Tentamen i Introduktionskurs Datavetenskapligt program, MMGD00, 2008-08-30.

1. (a) $A \cap B = \{1\}$
(b) $B \cup A = \{1, 5, 7, \{4, 6\}\}$
(c) $\mathcal{P}(A) = \{\{\}, \{1\}, \{5\}, \{7\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{5, 7\}, \{1, 5, 7\}\}$
(d) $A \times B = \{(1, 1), (1, \{4, 6\}), (5, 1), (5, \{4, 6\}), (7, 1), (7, \{4, 6\})\}$

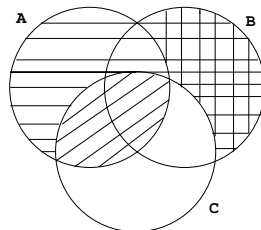
2.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=-4}^1 \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right| &= \left| \frac{1}{-4 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{-3 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{-2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{-1 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{0 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \right| = \\ &= \left| -\frac{2}{7} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3} - 2 + 2 + \frac{2}{3} \right| = \\ &= \left| \frac{-10 - 14}{5 \cdot 7} \right| = \left| -\frac{24}{35} \right| = \frac{24}{35}. \end{aligned}$$

3. (a) Venn-diagrammet ser ut så här med $(A \cup B) \setminus C$ markerat med horisontella linjer:



- (b) Mängden $(A \cup B) \setminus C$ är markerad med horisontella linjer i bilden nedan, mängden $B \setminus (A \cup C)$ är markerad med både vertikala och horisontella linjer och mängden $A \cap C$ är markerad med diagonala linjer.



Vi ser då att

$$|A| = |(A \cup B) \setminus C| - |B \setminus (A \cup C)| + |(A \cap C)| = 17 - 10 + 4 = 11.$$

4. (a) Vi har t.ex. att $1 \star (2 \star 1) = 1 \star 6 = 7$, men $(1 \star 2) \star 1 = 3 \star 1 = 10$.
 (b) Vi har t.ex. att $1 \star 0 = 1$, men $0 \star 1 = -2$.
 (c) Vi har att $x \star y = y \star x$ om och endast om

$$x - 2y + 3xy = y - 2x + 3yx \iff 3x = 3y \iff x = y.$$

Alltså kommuterar x och y bara i det triviala fallet då $x = y$.

5. (a) Den är injektiv, ty de tre elementen i definitionsmängden avbildas på tre olika element. Den är inte surjektiv, ty inget element avbildas på 4 som finns i målmängden.
 (b) Den är inte injektiv, ty $g(3) = g(4)$. Den är surjektiv, ty alla de tre elementen i målmängden finns i värdemängden.
 (c) Vi har att

$$f \circ g : B \longrightarrow B, f \circ g(1) = 1, f \circ g(2) = 2, f \circ g(3) = f \circ g(4) = 3,$$

samt

$$g \circ f : A \longrightarrow A, g \circ f(x) = x \text{ för alla } x.$$

- (d) Vi ser ifrån svaret på förra deluppgiften att $g \circ f$ är identitetsfunktionen på A och därmed är den både injektiv och surjektiv. För $f \circ g$ får vi att den inte är surjektiv (ty 4 finns i målmängden men inte i värdemängden) och inte heller injektiv (ty $f \circ g(3) = f \circ g(4)$).
 6. Vi definierar $f, g \in M$ genom

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(1) = 0, \\ f(x) = x, \text{ då } x > 1, \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} g(0) = 2, \\ g(1) = 0, \\ g(2) = 1, \\ g(x) = x, \text{ då } x > 2. \end{cases}$$

Vi får då att

$$\begin{aligned} f \star g(0) &= f(g(f^{-1}(g^{-1}(0)))) \\ &= f(g(f^{-1}(1))) = f(g(0)) = f(2) = 2 \end{aligned}$$

och att

$$\begin{aligned} g \star f(0) &= g(f(g^{-1}(f^{-1}(0)))) \\ &= g(f(g^{-1}(1))) = g(f(2)) = g(2) = 1. \end{aligned}$$

Alltså är $f \star g \neq g \star f$ och därmed är $\star$ inte kommutativ.