

Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Tentamen i Introduktionskurs D, TMA220, 2007-09-01

Inga hjälpmedel är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Magnus Goffeng, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Låt $A = \{5, a, 32, \text{flodhäst}, r\}$, $B = \{f, l, o, d\}$, $C = \{h, ä, s, t\}$ och $D = \text{Mängden av alla bokstäver i svenska alfabetet}$.

- (a) Bestäm $A \cap \mathbb{Z}$.
- (b) Bestäm $B \cup C$.
- (c) Bestäm $A \cap C$.
- (d) Bestäm $(B \cup C \cup A) \cap D$.

(8p)

2. (a) Skriv om summan $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4096}$ med hjälp av summasymbolen $\sum$.

- (b) Skriv om

$$\sum_{n=1}^{21} \frac{1}{n+1}$$

så att summan går från 0.

(7p)

3. Låt A , B och C vara tre mängder sådana att A och B är disjunkta (dvs $A \cap B = \emptyset$), $|A \cup B \cup C| = 30$, $|A \setminus C| = 10$ och $|B \setminus C| = 5$. Vad är det högsta respektive minsta antal element som C kan innehålla?

(6p)

4. Vi definierar två reella funktioner $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ genom

$$f(x) = x^2 \text{ och } g(x) = |x - 1|.$$

Bestäm alla x sådana att $f \circ g(x) = g \circ f(x)$. Motivera svaret noggrant.

(5p)

Var god vänd!

5. Låt E vara "Mängden av alla primtal".
Avgör vilka av följande alternativ som är sanna respektive falska. Endast rätt svar ger poäng.

- (a) $E \subset \mathbb{N}$.
- (b) $E \in \mathbb{N}$.
- (c) $E \in P(\mathbb{N})$.
- (d) $E \subset P(\mathbb{N})$.
- (e) $\mathbb{N} \setminus E \in P(\mathbb{N})$.

Tips: Ett primtal är ett positivt heltal som endast är jämnt delbart med 1 och sig självt. (4p)

6. Låt A vara mängden av alla andragradspolynom med reella koefficienter och B mängden av alla förstegradspolynom med reella koefficienter, dvs

$$\begin{aligned} A &= \{f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = a + bx + cx^2, a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ B &= \{f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = a + bx, a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Derivering är en funktion, $D: A \longrightarrow B$ definierad av

$$D(a + bx + cx^2) = b + 2cx.$$

- (a) Är $D: A \longrightarrow B$ injektiv?
- (b) Är $D: A \longrightarrow B$ surjektiv?
- (c) Har $D: A \longrightarrow B$ invers? Bestäm i så fall inversen.

Alla svar måste motiveras noggrant. (10p)

7. Låt A vara mängden av alla förstegradspolynom med reella koefficienter, dvs

$$A = \{f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = a + bx, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Vi definierar en operator, $\star$, på A genom

$$(a + bx) \star (c + dx) = (ad) + (bcx)$$

- (a) Är operatören kommutativ?
- (b) Är operatören associativ?
- (c) Finns det någon identitet? Bestäm i så fall denna.

Alla svar måste motiveras noggrant. (10p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 22 september. Resultaten anslås på Institutionen för matematiska vetenskaper och tentorna kan avhämtas på expeditionen på Institutionen för matematiska vetenskaper som har öppet vardagar 8.30-13.00.

LYCKA TILL!

Stefan.