

Matematiska vetenskaper

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Lösningar till

Tentamen i Introduktionskurs D, TMA220, 2009-08-29.

Tentamen i Introduktionskurs Datavetenskapligt program, MMGD00, 2009-08-29.

1. (a)
$$\sum_{k=-3}^2 \frac{k+1}{3} = \frac{-2}{3} + \frac{-1}{3} + \frac{0}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = 1$$

(b)
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{55} = \sum_{k=1}^{14} \frac{1}{4k-1}$$

2. (a) Falskt, ty tomma mängden är inget tal och alltså inget element i $\mathbb{N}$.
(b) Sant, tomma mängden är delmängd till alla mängder.
(c) Falskt, ty $\mathbb{N}$ innehåller inga negativa tal.
(d) Sant, ty alla element i $\{1\}$ är naturliga tal och den innehåller ju långt ifrån alla naturliga tal så det är äkta delmängd.
(e) Falskt, ty potensmängden innehåller två **mängder** och ingen av dessa finns i $\mathbb{N}$.

3.

$$\begin{aligned} A &= \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ B &= \{0, 1, 7, 8, 9\} \\ A \cap B &= \{7, 8, 9\} \\ A \cup B &= \{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ A \setminus B &= \{4, 5, 6\} \end{aligned}$$

4. (a) Vi får att $g \circ f(x)$ är betyget som x får på tentan, eftersom $g \circ f(x) = g(f(x))$.
(b) Funktionen g är inte injektiv, eftersom tex $g(20) = g(50) = \text{'Godkänd'}$.
(c) Ja, g är surjektiv, ty tex $g(0) = \text{'Underkänd'}$ och $g(50) = \text{'Godkänd'}$ så $g(B) = C$.
(d) Nej, f är inte injektiv, ty mer än 80 personer skriver tentan och det finns bara 51 möjliga resultat. Alltså måste minst två få samma poäng.
5. (a) Ja den är kommutativ, ty för alla rationella tal x och y gäller $x + y = y + x$ samt $|x - y| = |-(x - y)| = |y - x|$ så

$$x \star y = \frac{x + y}{|x - y| + 1} = \frac{y + x}{|y - x| + 1} = y \star x.$$

(b) Nej den är inte associativ, ty t ex gäller att

$$(1 \star 2) \star 0 = \frac{3}{2} \star 0 = \frac{3}{5}$$

medan

$$1 \star (2 \star 0) = 1 \star \frac{2}{3} = \frac{5}{4}.$$

(c) Om e är en identitet så ska

$$a = a \star e = \frac{a + e}{|a - e| + 1} \iff a \cdot |a - e| + a = a + e \iff a \cdot |a - e| = e$$

för **alla** a . Om vi sätter $a = 0$ så ser vi att $e = 0$ är enda möjligheten. Men $e = 0$ ger $a = 0$ eller $|a - 0| = 0$, dvs $a = 0$. Alltså finns det inget e som fungerar för alla a och därmed finns det ingen identitet.

6. (a) För negativa x avtar funktionen ifrån minus oändligheten mot 2 eftersom $-3x$ är strängt avtagande. Funktionen fortsätter avta för positiva x med start vid 2 eftersom $-x^2$ är avtagande för positiva x och går mot minus oändligheten då x går mot oändligheten. Alltså antar funktionen alla reella tal precis en gång.
- (b) Sätt $y = g(x)$. Då är $x = g^{-1}(y)$. För $x < 0$ är $y > 2$ och då har vi $y = 2 - 3x$ så $x = (2 - y)/3$. Alltså är

$$g^{-1}(y) = \frac{2 - y}{3}, \text{ för } y > 2.$$

För $x \geq 0$ är $y \leq 2$ och då har vi $y = 2 - x^2$ så $x = \sqrt{2 - y}$. Alltså är

$$g^{-1}(y) = \sqrt{2 - y}, \text{ för } y \leq 2.$$

Sammantaget får vi alltså

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{2-y}{3} & \text{för } y > 2, \\ \sqrt{2-y} & \text{för } y \leq 2. \end{cases}$$