MATEMATISKA VETENSKAPER CTH och GU

Skrivning TMA225 Tillämpad Matematik Kf1 2 juni, 2009 V em

Provet består av totalt tre (3) uppgifter. Max poäng: 100 Varje deluppgift ger maximalt 5p. Betygsgränser: 3: 40p, 4: 60p, 5: 75p. Det krävs att lösningarna är välskrivna med ordentliga motiveringar. Slarvigt skrivna lösningar kan ge poängavdrag.

Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare

Telefonvakt: Adam Wojciechowski 0762-721861

1. (a) En reell geometrisk serie är på formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$$

där a och r är reella konstanter. Låt oss anta att $a \neq 0$. För vilka r konvergerar serien? Visa detta. Vad blir summan?

(b) Det gäller att om serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

konvergerar så måste $a_k \to 0$ då $k \to +\infty$. Däremot gäller inte omvändningen. Ge ett exempel på detta, dvs en serie där $a_k \to 0$ då $k \to +\infty$ men serien konvergerar ej. Resultatet i exemplet ska bevisas.

(c) Definiera begreppen potensserie och konvergensradie för en funktion $f = f(x)$.

(d) Resonemanget i uppgift (a) kan användas för att visa att funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

kan utvecklas i en potensserie för $x \in I$, där I är ett intervall i $(-\infty, +\infty)$. Bestäm detta intervall och skriv upp potensserien för $f(x)$ på detta intervall.

(e) En fyrkantvåg kan beskrivas med att vi först definierar en funktion f på intervallet $(-1,1)$ enligt

$$f(t)=\begin{cases} 1, & 0<t<1 \\ -1, & -1<t<0, \end{cases}$$

och sedan utvidgar denna till en periodisk funktion g med period $T=2$ definierad på hela $\mathbb{R}$. Rita upp funktionen g.

(f) Det visar sig att funktionen g kan skrivas som en Fourierserie

$$g(t)=\frac{4}{\pi}\left(sin(\pi t)+\frac{1}{3}sin(3\pi t)+\frac{1}{5}sin(5\pi t)+\ldots\right)$$

Använd detta för att beräkna summan

$$S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$$

genom att evaluera $g(t)$ för lämpligt val av t.

2. Låt $I=[0,2\pi]$. Låt τ_h vara en uniform indelning av I i fyra delintervall $I_i=[x_i,x_{i+1}]$., $i=1,2,3,4$. Låt V_h vara rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på I, där varje v i V_h är linjär på varje I_i. Låt vidare $u(x)=sin(x)$.

(a) Rita in u och nodinterpolanten $\pi_h u$ i samma graf och ange $\pi_h u$'s värde i nodpunkterna.

(b) Beräkna $||u-\pi_h u||_{L^\infty(I_1)}$.

(c) Använd feluppskattningsformeln för att uppskatta $||u-\pi_h u||_{L^\infty(I_1)}$.

(d) Skalärprodukten mellan funktionerna f och g på intervallet $I=[0,2\pi]$ definieras som

$$(f,g)=(f,g)_I=\int_I f(x)g(x)dx.$$

och f och g är ortogonala på intervallet I om integralen ovan är noll, dvs om

$$(f,g)=(f,g)_I=\int_I f(x)g(x)dx=0.$$

Visa att $f(x) = \sin(x)$ och $g(x) = \sin(2x)$ är ortogonala på intervallet I.

Tips: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

(e) Definiera L^2-projektionen $u_h \equiv P_h u$ till u på V_h.

(f) Visa Cea's lemma, dvs att $\|u - u_h\|_{L^2(I_1)} \leq \|u - v\|_{L^2(I_1)}$ för alla $v \in V_h$.

(g) Härled, utan att beräkna u_h, ekvationssystemet för beräkning av u_h.

3. Låt $I = [0, 1]$. Låt τ_h vara en uniform indelning av I i två delintervall $I_i = [x_i, x_{i+1}]$., $i = 1, 2$. Låt V_h vara rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på I, där varje v i V_h är linjär på varje I_i med tillägget att $v(0) = v(1) = 0$. Betrakta tvåpunkts randvärdesproblemt

$$(1) \qquad \begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x), & x \in I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Antag att (1) modellerar stationär värmeledning i en tunn stav. Beskriv vad $a(x)$, $u(x)$, $-a(x)u'(x)$ samt $f(x)$ står för.

(b) Gör en variationsformulering av (1).

(c) Gör en FEM-formulering av (1).

(d) Härled ekvationssystemet för FEM-problemet till (1).

(e) Antag att $a(x) = f(x) = 1$. Lös (1) exakt.

(f) Antag att $a(x) = f(x) = 1$ igen och lös FEM-problemet, dvs lös systemet i (d), för hand.

(g) Rita in exakta lösningen och FEM-ösningen i samma figur.

För att vi ska få en snabb feedback: Ge en kort kommentar om hur Du upplevt denna kurs. Är till exempel balansen mellan teori och simuleringar lagom?

Tack för mig och Trevlig sommar!

Nils

Lösningar TMA225 2/6-2009

1 (a) Studera partialsummor.

$$S_k = a + ar + \dots + ar^k$$

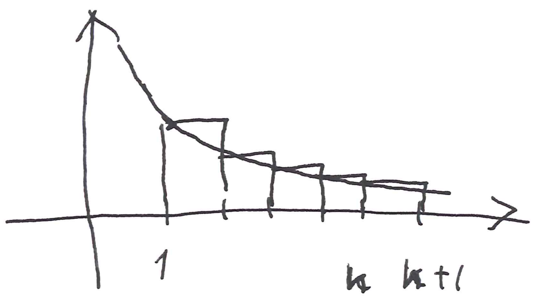
$$rS_k = ar + \dots + ar^k + ar^{k+1}$$

$$S_k - rS_k = a - ar^{k+1}$$

$$S_k = a\,\frac{1-r^{k+1}}{1-r} \to \frac{a}{1-r} \quad \text{om } |r|<1.$$

(b) Harmoniska serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

Integral test



$$S_{n+1} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$$

HL $\to \infty$ då $n \to \infty$

så $S_n \to \infty$.

(c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

Konvergensradie: $|x-x_0| < R$ konvergens

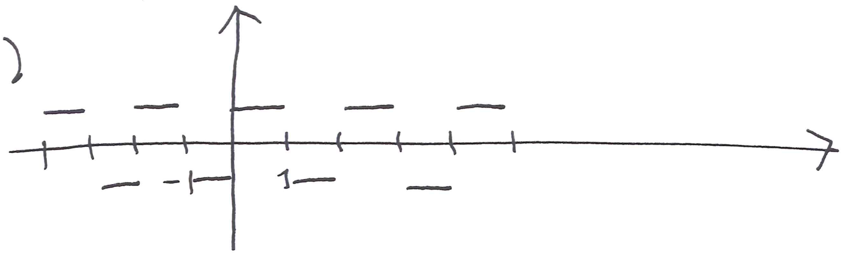
$|x-x_0| \geq R$ divergens

R kallas konvergensradie.

(d) Konvergens för $|x|<1$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

(e)



(f) $g(\frac{1}{2}) = 1$ enl. definitionen och

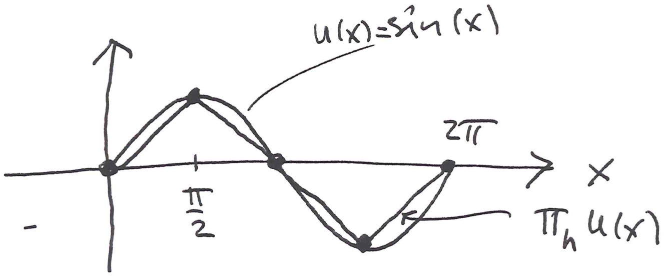
$$g(\tfrac{1}{2}) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} + \dots\right)$$

som Fourierutveckling. Jämförelse ger

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

2 (a)



(b) $\Pi_h u(x) = \frac{2}{\pi}x$ på I_1

$f(x) = u(x) - \Pi_h u(x) = \sin(x) - \frac{2}{\pi}x$. Sök max av f på $I_1 = [0, \frac{\pi}{2}]$.

$f'(x) = \cos(x) - \frac{2}{\pi}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{2}{\pi}$

$x = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$

$f''(x) = -\sin(x) < 0$ på I_1

$\Rightarrow$ maxvärde i $\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right) \approx 0.8807$

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^\infty(I_1)} = \max_{x \in I_1} |u(x) - \Pi_h u(x)| =$$

$$\left|u\left(\arccos\left(\tfrac{2}{\pi}\right)\right) - \Pi_h u\left(\arccos\left(\tfrac{2}{\pi}\right)\right)\right| = \left|\sin\left(\arccos\left(\tfrac{2}{\pi}\right)\right) - \tfrac{2}{\pi}\arccos\left(\tfrac{2}{\pi}\right)\right|$$

≈ 0.2105

2 (c) $$\|u-\pi_h u\|_{L^\infty(I_1)} \leq \frac{1}{8}|I_1|^2 \max_{x\in I_1} |u''(x)|$$

$$= \frac{\pi^2}{32}\cdot 1 \approx 0.3084$$

(d) $$\int_0^{2\pi} \sin(x)\sin(2x)\,dx = 2\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sin^3(x)\right]_0^{2\pi} = 0$$

(e) $P_h u$ definieras av $\int_I (u-P_h u)\cdot v\,dx = 0$

för alla $v \in V_h$.

(f) $$\|u-u_h\|^2_{L^2(I_1)} = (u-u_h, u-u_h) = (u-u_h, u-v) + \underbrace{(u-u_h, v-u_h)}_{=0}$$

$$= (u-u_h, u-v) \leq \|u-u_h\|\,\|u-v\|$$

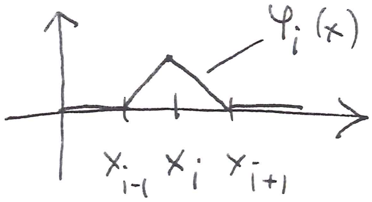
Cauchy-Schwarz olikhet

$\Rightarrow \|u-u_h\| \leq \|u-v\|$

för alla $v \in V_h$.

(g) Sätt $u_h(x) = \sum_{i=1}^{5} c_i \varphi_i(x)$ och välj $v(x) = \varphi_j(x)$

$j = 1, \dots, N$



$\int_I u_h v\,dx = \int_I u v\,dx$ blir då

$$\sum_{i=1}^{5} c_i \int_I \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \int_I u(x)\varphi_j(x)\,dx \quad j = 1, \dots, 5$$

2 (g) forts: med $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_5 \end{pmatrix}$ $M = M_{ij} = \int_I \varphi_i \varphi_j \, dx$

och $b = b_j = \int_I u \varphi_j \, dx$ fås

det kvadratiska symmetriska ekvationssystemet

$$Mc = b$$

3 (a) $a(x)$: värmekonduktivitet (materialegenskap)

$u(x)$: temperaturfördelning $u(x_0)$ temperatur i x_0.

$-a(x)u'(x)$: värmeflödet

$f(x)$: värmekälla längs I.

(b) Multiplicera med testfunktion $v \in V$ där $V = H_0^1(I)$ är lämpligt ty $u(0) = u(1) = 0$. och integrera över I. Efter partialintegration i VL får vi: Bestäm $u \in H_0^1(I)$ så att

$$\int_I a(x) u'(x) v'(x) \, dx = \int_I f(x) v(x) \, dx \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

(c) Projicera på $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ och: Bestäm $u_h \in V_h$:

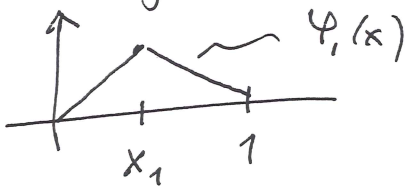
$$\int_I a(x) u_h'(x) v(x) \, dx = \int_I f(x) v(x) \, dx \quad \forall v \in V_h.$$

(d) Med $u_h(x) = \sum c_i \varphi_i(x) = c_1 \varphi_1(x)$

och $v(x) = \varphi_1(x)$ fås

$$c_1 \int_I \varphi_1'(x)\,\varphi_1'(x)\,dx = \int_I f(x)\,\varphi_1(x)\,dx$$

ty med två delintervall och homogena randdata behövs bara "mitt noden"



(e) $\begin{cases} -u''(x) = 1 & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

Integration 2 ggr ger

$$u(x) = -\frac{x^2}{2} + cx + d$$

$$\left.\begin{aligned} u(0) = 0 &\Rightarrow d = 0 \\ u(1) = 0 &\Rightarrow c = \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

(f) $c_1 \int_0^1 2\,dx = 2c_1$ $\qquad \int_0^1 \varphi_1(x)\,dx = 2\int_0^{0.5} 2x\,dx =$

$$= 2 \cdot 0.25 = 0.5$$

$$\Rightarrow c_1 = 0.25$$

(g)