

Tentamen i tma 235 Matematisk introduktionskurs för IT
lösningar
2006-09-02

1. Låt $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{3, 4, 6, 9\}$ och $C = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 4 \text{ \& } n < 7\}$.

- (a) Bestäm $A \cup B$. (2p)
- (b) Bestäm $A \cap B$. (2p)
- (c) Bestäm $(A \cup C) \setminus B$. (2p)
- (d) Bestäm $|A \cup B|$. (2p)
- (e) Ange potensmängden till A , $\mathcal{P}(A)$. (2p)

Lösning: Notera att $C = \{4, 5, 6\}$.

- (a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$
 - (b) $A \cap B = \{4\}$
 - (c) $(A \cup C) = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, $(A \cup C) \setminus B = \{1, 2, 5\}$
 - (d) $|A \cup B| = 6$
 - (e) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$
2. (a) Gör en sanningsstabell för det logiska uttrycket $p \wedge (p \rightarrow q)$. (5p)
- (b) Visa att utsagorna $\neg(p \vee q)$ och $\neg p \wedge \neg q$ är logiskt ekvivalenta genom att göra en sanningsstabell. (5p)

Lösning:

- (a) Vi gör en sanningsstabell för uttrycket:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$
S	S	S	S
S	F	F	F
F	S	S	F
F	F	S	F

- (b) Vi gör en sanningsstabell för påståendet:

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
S	S	S	F	F
S	F	S	F	F
F	S	S	F	F
F	F	F	S	S

Vi ser att de två sista kolumnerna är lika och därför är uttrycken logiskt ekvivalenta.

3. (a) Låt $A = \{\text{Alla studenter som skriver den här tentan}\}$, med $|A| > 60$, och $B = \{k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq 50\}$. Ange en funktion $f : A \rightarrow B$ och bestäm om den är surjektiv, injektiv och/eller inverterbar. Motivera! (5p)
- (b) Bestäm en funktion $g : A \rightarrow B$ som är bijektiv (inverterbar). Glöm inte att ange A , B och att motivera ditt svar! (5p)

Lösning:

- (a) Förslag på funktion $f : A \rightarrow B$ är $f(x) = \text{'Det antal poäng som person } x \text{ får på tentan'}$.

Funktionen är *surjektiv* om varje poängantal uppnåtts av minst en student.

Funktionen är inte *injektiv* eftersom det är fler än 51 personer som skrivit tentan och det endast finns 51 möjliga poängsummor. Alltså måste minst två personer ha fått samma poängresultat.

Eftersom funktionen inte är injektiv så kan den inte vara *inverterbar*.

- (b) För exempel på bijektiva funktioner kan man titta i kursboken.

4. Definiera två binära operatorer $\star$ på $\mathbb{R}$ och $\diamond$ på $\mathbb{N}$ genom

$$x \star y = 2xy - x - y + 2$$

och

$$x \diamond y = \max(x, y),$$

där $\max(x, y)$ är det största talet av x och y , t. ex. $\max(3, 5) = 5$.

- (a) Undersök om operatorn $\star$ är kommutativ, associativ, har identitet och invers? (5p)
- (b) Undersök om operatorn $\diamond$ är kommutativ, associativ, har identitet och invers? (5p)

Lösning:

- (a) $\star$ är *kommutativ* ty $x \star y = 2xy - x - y + 2$ och $y \star x = 2yx - y - x + 2 = x \star y$ eftersom multiplikation och addition av reella tal är kommutativ.

Operatorn $\star$ är inte *associativ* vilket följer av att

$$a \star (b \star c) = 4abc - 2ab - 2ac - 2bc + 3a + b + c$$

och

$$(a \star b) \star c = 4abc - 2ac - 2bc - 2ab + a + b + 3c.$$

Alltså

$$a \star (b \star c) \neq (a \star b) \star c \text{ om } a \neq c.$$

För en *identitet* $e \in \mathbb{R}$ ska det gälla att $e \star a = a \star e = a$ för alla $a \in \mathbb{R}$. Här får vi då att

$$e \star a = 2ea - a + 2 = a.$$

Vi löser ut e och får då

$$e = \frac{2a - 2}{2a - 1}.$$

Eftersom e beror av a så saknas identitet.

Eftersom $\star$ saknar identitet så kan den inte heller ha någon *invers*.

- (b) $\diamond$ är *kommutativ* ty $\max(a, b) = \max(b, a) =$ största elementet oavsett ordning.
 $\diamond$ är *associativ* eftersom man alltid får ut det maximala elementet av tre oavsett vilken ordning man jämför dem i.
 $\diamond$ har 0 som *identitet* ty $\max(0, a) = a$.
 Det enda element som har *invers* är 0 eftersom $a \diamond b = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

5. Låt tre funktioner ges av $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$ och $h(x) = \frac{1}{x}$.

- (a) Bestäm definitionsområdet och värdemängden till $f(x)$. (2p)
 (b) Bestäm definitionsområdet till $g(x)$. (1p)
 (c) Rita grafen till $h \circ g$. (2p)
 (d) Bestäm inversfunktionen till $g(x)$. (2p)

Lösning:

- (a) Definitionsområdet till $f(x)$ är $\mathbb{R}$ och målmängden är $(0, 1]$.
 (b) Definitionsområdet till $g(x)$ är $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$.
 (c) $h \circ g = h(\frac{1}{1+x}) = \frac{1}{1/(1+x)} = 1 + x$.
 (d) Inversen till $g(x)$ är funktionen $g^{-1}(y)$ sådan att $g^{-1}(y) = x$ då $g(x) = y$. Lös därför ekvationen $\frac{1}{1+x} = y$ med avseende på x och vi får då inversen $g^{-1}(y) = x = \frac{1}{y} - 1$.

6. Beräkna $\sum_{n=1}^{99} (100 - n)$. (3p)

Lösning:

$$S = \sum_{n=1}^{99} (100 - n) = 99 + 98 + 97 + \cdots + 2 + 1$$

$$2S = 99 + 98 + 97 + \cdots + 2 + 1 + 1 + 2 + \cdots + 98 + 99 = 100 + 100 + \cdots + 100 = 99 \cdot 100$$

$$\text{Vi får } S = \sum_{n=1}^{99} (100 - n) = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950.$$