Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Karin Kraft

Tentamen i tma 235 Matematisk introduktionskurs för IT
lösningar
2007-09-01

1. (a) Visa att utsagorna $p \wedge (q \vee r)$ och $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ är logiskt ekvivalenta genom att göra en sanningstabell. (5p)

   (b) Förenkla uttrycket
$$\neg((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r))$$
så långt som möjligt. (5p)
Ledning:
$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
$$p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Lösning:

(a) Vi gör en sanningstabell för uttrycket:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	S	S	S	F	S
S	F	F	S	S	F	S	S
S	F	S	F	F	F	F	F
F	S	S	S	F	F	F	F
F	S	F	S	F	F	F	F
F	F	S	S	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Vi ser att kolumnerna för de båda uttrycken är lika och därför är uttrycken logiskt ekvivalenta.

(b)
$$\neg((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r))$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg r)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$p \vee (\neg q \wedge r)$$

2. Låt $A = \{5, a, 32, \mathit{flodhäst}, r\}$, $B = \{f, l, o, d\}$, $C = \{h, ä, s, t\}$ och D=*"Mängden av alla bokstäver i svenska alfabetet"*.

   (a) Bestäm $A \cap \mathbb{Z}$. (2p)

   (b) Bestäm $B \cup C$. (2p)

   (c) Bestäm $A \cap C$. (2p)

   (d) Bestäm $(B \cup C \cup A) \cap D$. (2p)

   Lösning:

   (a) $A \cap \mathbb{Z} = \{5, 32\}$

   (b) $B \cup C = \{f, l, o, d, h, ä, s, t\}$

   (c) $A \cap C = \emptyset$

   (d) $(B \cup C \cup A) \cap D = \{f, l, o, d, h, ä, s, t, a, r\}$

3. Låt A vara mängden av alla andragradspolynom med reella koefficienter och B mängden av alla förstagradspolynom med reella koefficienter, dvs

$$\begin{aligned} A &= \{f : \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = a + bx + cx^2,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}, \\ B &= \{f : \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = a + bx,\ a, b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Derivering är en funktion, $D : A \longrightarrow B$ definierad av

$$D(a + bx + cx^2) = b + 2cx.$$

   (a) Är $D : A \longrightarrow B$ injektiv?(4p)

   (b) Är $D : A \longrightarrow B$ surjektiv?(4p)

   (c) Har $D : A \longrightarrow B$ invers? Bestäm i så fall inversen. (2p)

   Alla svar måste motiveras noggrant.

   Lösning:

   (a) Deriveringen är inte injektiv då t ex $D(1 + x) = D(x) = 1$.

   (b) Deriveringen är surjektiv, ty tag godtyckligt polynom $f(x) = a + bx \in B$. Då gäller att derivatan av (den primitiva funktionen) $ax + \frac{b}{2}x^2$ uppfyller precis

$$D(ax + \frac{b}{2}x^2) = a + 2\frac{b}{2}x = f(x).$$

   (c) Eftersom funktionen inte är injektiv så är den inte inverterbar och saknar alltså invers.

4. Låt A vara mängden av alla förstagradspolynom med reella koefficienter, dvs

$$A = \{f : \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = a + bx,\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

   Vi definierar en operator, $\star$, på A genom

$$(a + bx) \star (c + dx) = (ad) + (bcx).$$

(a) Är operatorn kommutativ?(3p)
(b) Är operatorn associativ?(3p)
(c) Finns det någon identitet? Bestäm i så fall denna.(4p)

Alla svar måste motiveras noggrant.

Lösning:

(a) Nej den är inte kommutativ, ty t ex $1 \star x = 1$ men $x \star 1 = x$.
(b) Nej den är inte associativ, ty t ex
$$(1 \star x) \star x = 1 \star x = 1$$
men
$$1 \star (x \star x) = 1 \star 0 = 0.$$
(c) En identitet $e + fx$ ska uppfylla
$$(e + fx) \star (a + bx) = a + bx \text{ och } (a + bx) \star (e + fx) = a + bx$$
för alla polynom $a + bx$. Den andra likheten ger att $af = a$ och $be = b$ för alla a och b. Dessa har den enda lösningen $e = f = 1$. Sätter man in detta i den första likeheten så får man $a + bx = (1 + x) \star (a + bx) = b + ax$ och detta stämmer inte för alla $a + bx$ (utan bara då $a = b$). Alltså finns det inte någon identitet.

5. Vi definierar två reella funktioner $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ genom
$$f(x) = x^2 \text{ och } g(x) = |x - 1|.$$
Bestäm alla x sådana att $f \circ g(x) = g \circ f(x)$. Motivera svaret noggrant.(3p)

Lösning: Vi har att $f \circ g(x) = |x - 1|^2 = (x - 1)^2$ och $g \circ f(x) = |x^2 - 1|$.

För $x \geq 1$ och $x \leq -1$ så är $g \circ f(x) = x^2 - 1$ och
$$f \circ g(x) = g \circ f(x) \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 1 \Longleftrightarrow 2x = 2 \Longleftrightarrow x = 1.$$
För $-1 < x < 1$ så är $g \circ f(x) = 1 - x^2$ och
$$f \circ g(x) = g \circ f(x) \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 - x^2 \Longleftrightarrow 2x^2 = 2x \Longleftrightarrow x = 1 \vee x = 0.$$
Alltså har ekvationen lösningarna $x = 0$ och $x = 1$.

6. Låt E vara "*Mängden av alla primtal*".
Avgör vilka av följande alternativ som är sanna respektive falska. Endast rätt svar ger poäng.(4p)

(a) $E \subset \mathbb{N}$.
(b) $E \in \mathbb{N}$.
(c) $E \in P(\mathbb{N})$.
(d) $E \subset P(\mathbb{N})$.
(e) $\mathbb{N} \setminus E \in P(\mathbb{N})$.

Ledning: Ett primtal är ett positivt heltal som endast är jämnt delbart med 1 och sig självt.

Lösning: Alternativ a, c och e är rätt.

7. (a) Skriv om summan $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$ med hjälp av summasymbolen $\sum$. (2p)

   (b) Skriv om
$$\sum_{n=1}^{21} \frac{1}{n+1}$$
   så att summan går från 0. (3p)

Lösning:

(a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{2^k}$

(b) Låt $k=n-1$. Vi får då
$$\sum_{n=1}^{21} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{20} \frac{1}{k+2}$$