Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Karin Kraft

Tentamen i tma 235 Matematisk introduktionskurs för IT
lösningar
2007-10-06

1. Är det logiska uttrycket

$$(p \land \neg p) \lor (q \lor \neg q) \to (r \to r)$$

en tautologi? (5p)

Lösning: Om man vill kan man skriva en sanningstabell för samtliga variabler, men man inser lätt att $r \to r$ alltid är sann, och därav följer att hela uttrycket slltid är sant, eftersom det är en implikation vars andra del är sann. Det är således en tautologi.

2. (a) Bestäm A och B så att $A \cap B = \{7, 2\}$. (2p)
   (b) Bestäm C så att $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. (2p)
   (c) Låt $D = \{6, 7, 8, 9\}$. Hur många element innehåller $\mathcal{P}(D)$? (2p)
   (d) Låt $E = \{5, 8, 6\}$. Visa att $\mathcal{P}(D \cap E) = \mathcal{P}(D) \cap \mathcal{P}(E)$. (2p)
   (e) I själva verket gäller $\mathcal{P}(F \cap G) = \mathcal{P}(F) \cap \mathcal{P}(G)$ för alla mängder F och G. Det behöver du inte visa. Visa däremot att $\mathcal{P}(F \cup G) = \mathcal{P}(F) \cup \mathcal{P}(G)$ **inte** gäller! (2p)

   Lösning:

   (a) Tag till exempel $A = B = \{7, 2\}$.
   (b) Här fungerar bara $C = \{a, b\}$.
   (c) Antalet element är $2^{|D|} = 2^4 = 16$.
   (d)
   $$\mathcal{P}(D \cap E) = \mathcal{P}(\{6, 8\}) = \{\emptyset, \{6\}, \{8\}, \{6, 8\}\}.$$
   Samtliga av dessa element finns i både $\mathcal{P}(D)$ och $\mathcal{P}(E)$. Däremot har de inga fler element gemensamma, eftersom resterande element innehåller minst ett element som saknas i D eller E. Alltså gäller likheten.

(e) Låt $F = \{f\}$ och $G = \{g\}$. Då gäller

$$\mathcal{P}(F \cup G) = \{\emptyset, \{f\}, \{g\}, \{f, g\}\}$$

och

$$\mathcal{P}(F) \cup \mathcal{P}(G) = \{\emptyset, \{f\}, \{g\}\}.$$

Allmänt gäller dessutom att om F och G är disjunkta så får vi

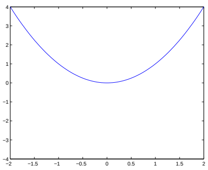
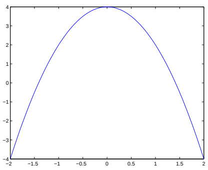
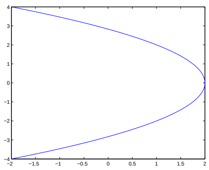
$$|\mathcal{P}(F \cup G)| = 2^{|F|+|G|}$$

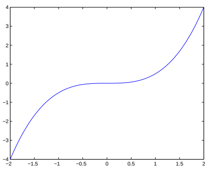
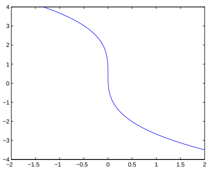
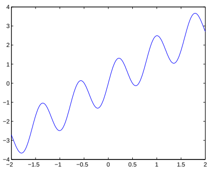
och

$$|\mathcal{P}(F) \cup \mathcal{P}(G)| = 2^{|F|} + 2^{|G|} - 1,$$

vilket också visar att mängderna inte är lika generellt.

3. Nedan visas ett antal grafer. Ange för varje graf om den visar en funktion från $[-2, 2]$ till $[-4, 4]$, och i så fall om funktionen är injektiv, surjektiv eller bijektiv.

(A)  (B)  (C) 

(D)  (E)  (F) 

Motivera dina svar. (10p)

Lösning:

(a) Grafen visar en funktion som varken är surjektiv (inget avbildas på negativa värden) eller injektiv (två x avbildas på varje positivt y).

(b) Denna graf visar en funktion som är surjektiv (det avbildas till samtliga y), men inte injektiv, eftersom funktionen avbildar två x till varje y i intervallet.

(c) Detta är inte en funktion, eftersom det till i stort sett samtliga x hör två värden på y.

(d) Detta är en bijektiv funktion. Den avbildar exakt ett x till varje y. Om man tycker att funktionen är alldeles platt i mitten så blir den i sä fall surjektiv, men inte injektiv.

(e) Detta är inte en funktion, eftersom den inte ger några y för de minsta värdena på x i intervallet.

(f) Funktionen är varken surjektiv eller bijektiv.

4. Låt A vara operatorn $\star$ på $\mathbb{R}$ definierad genom

$$x \star y = x + y + xy.$$

(a) Finns det någon identitet? Bestäm i så fall denna. (2p)

(b) Är operatorn kommutativ? (2p)

(c) Är operatorn associativ? (3p)

(d) Vilka element har en invers och vilken är inversen? (3p)

Alla svar måste motiveras noggrant.

Lösning:

(a) Ja, operatorn har en identitet, nämligen 0, eftersom $x \star 0 = x + 0 + 0 = x$ och $0 \star x = 0 + x + 0 = x$.

(b) Ja, operatorn är kommutativ, eftersom

$$x \star y = x + y + xy = y + x + yx = y \star x.$$

(c) Ja, operatorn är associativ, eftersom

$$\begin{aligned}
(x \star y) \star z &= (x + y + xy) \star z \\
&= (x + y + xy) + z + (x + y + xy)z \\
&= x + y + z + xy + xz + yz + xyz \\
&= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) \\
&= x \star (y + z + yz) \\
&= x \star (y \star z).
\end{aligned}$$

(d) En invers a ska uppfylla $x \star a = 0$, eftersom 0 är identitet för denna operator. Men då får vi

$$\begin{aligned} 0 &= x \star a = x + a + xa = x + a(1+x) \\ \implies -x &= a(1+x) \\ \implies a &= \frac{-x}{1+x}. \end{aligned}$$

För $x \neq -1$ finns alltså en invers, nämligen $-x/(1+x)$, men för $x = -1$ saknas invers.

5. (a) Visa att $(x_1 + 3)^2 - (x_2 + 3)^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 6)$. (2p)

(b) Är funktionen $f(x) = (x + 3)^2$ injektiv på intervallet $[-2, 2]$? *Ledning*: Använd föregående uppgift. (4p)

(c) Låt $g(x) = x^2 + 2x + 3$ och $h(x) = 1/(1 + x)$. Beräkna $(g \circ h)(x)$ och $(h \circ g)(x)$. Uttrycken ska förenklas. (3p)

Lösning:

(a) Vi har

$$\begin{aligned} (x_1 + 3)^2 - (x_2 + 3)^2 &= (x_1^2 + 6x_1 + 9) - (x_2^2 + 6x_2 + 9) \\ &= x_1^2 - x_2^2 + 6x_1 - 6x_2 \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 6(x_1 - x_2) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 6). \end{aligned}$$

(b) Vi måste undersöka om $f(x_1) = f(x_2)$ har någon lösning förutom $x_1 = x_2$. Vi får

$$0 = f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + 3)^2 - (x_2 + 3)^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 6),$$

som har lösningarna $x_1 - x_2 = 0$ och $x_1 + x_2 + 6 = 0$. Den förra är just $x_1 = x_2$ och den senare saknar lösning för $x_1, x_2 \in [-2, 2]$. Alltså är $f(x)$ injektiv på detta intervall.

(c) Vi får

$$\begin{aligned}(g \circ h)(x) &= g(h(x)) \\ &= g(\frac{1}{1+x}) \\ &= \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{1+x} + 3 \\ &= \frac{1 + 2(1+x) + 3(1+x)^2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{6 + 8x + 3x^2}{(1+x)^2}\end{aligned}$$

och

$$(h \circ g)(x) = h(x^2 + 2x + 3) = \frac{1}{1 + x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{x^2 + 2x + 4}.$$

6. (a) Förenkla

$$\sum_{n=2}^{200} n - \sum_{k=0}^{198} k,$$

först till en summa och sedan till ett naturligt tal. (3p)

(b) Skriv ut termerna i summan $\sum_{m=8}^{12} 3m$. (3p)

Lösning:

(a) Vi får

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{200} n - \sum_{k=0}^{198} k = \{n = k+2\} &= \sum_{k=0}^{198} (k+2) - \sum_{k=0}^{198} k \\ &= \sum_{k=0}^{198} (k + 2 - k) \\ &= \sum_{k=0}^{198} 2 \\ &= 199 \cdot 2 = 398.\end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{m=8}^{12} 3m = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 11 + 3 \cdot 12 = 24 + 27 + 30 + 33 + 36.$$