

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk introduktionskurs för IT, TMA235, 2007-09-01, 8.30-12.30

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Magnus Goffeng, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

OBS! Notera att tentan är på två sidor.

1. (a) Visa att utsagorna $p \wedge (q \vee r)$ och $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ är logiskt ekvivalenta genom att göra en sanningstabell. (5p)

- (b) Förenkla uttrycket

$$\neg((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r))$$

så långt som möjligt. (5p)

Ledning:

$$\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$$

$$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

2. Låt $A = \{5, a, 32, \text{flodhäst}, r\}$, $B = \{f, l, o, d\}$, $C = \{h, ä, s, t\}$ och $D = \text{"Mängden av alla bokstäver i svenska alfabetet"}$.

- (a) Bestäm $A \cap \mathbb{Z}$. (2p)
(b) Bestäm $B \cup C$. (2p)
(c) Bestäm $A \cap C$. (2p)
(d) Bestäm $(B \cup C \cup A) \cap D$. (2p)

3. Låt A vara mängden av alla andragradspolynom med reella koefficienter och B mängden av alla förstgradspolynom med reella koefficienter, dvs

$$A = \{f : f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = a + bx + cx^2, a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

$$B = \{f : f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = a + bx, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Derivering är en funktion, $D : A \longrightarrow B$ definierad av

$$D(a + bx + cx^2) = b + 2cx.$$

- (a) Är $D : A \longrightarrow B$ injektiv?(4p)
- (b) Är $D : A \longrightarrow B$ surjektiv?(4p)
- (c) Har $D : A \longrightarrow B$ invers? Bestäm i så fall inversen. (2p)

Alla svar måste motiveras noggrant.

4. Låt A vara mängden av alla förstegradspolynom med reella koefficienter, dvs

$$A = \{f : f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = a + bx, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Vi definierar en operator, $\star$, på A genom

$$(a + bx) \star (c + dx) = (ad) + (bcx).$$

- (a) Är operatorn kommutativ?(3p)
- (b) Är operatorn associativ?(3p)
- (c) Finns det någon identitet? Bestäm i så fall denna.(4p)

Alla svar måste motiveras noggrant.

5. Vi definierar två reella funktioner $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ genom

$$f(x) = x^2 \text{ och } g(x) = |x - 1|.$$

Bestäm alla x sådana att $f \circ g(x) = g \circ f(x)$. Motivera svaret noggrant.(3p)

6. Låt E vara “Mängden av alla primtal”.

Avgör vilka av följande alternativ som är sanna respektive falska. Endast rätt svar ger poäng.(4p)

- (a) $E \subset \mathbb{N}$.
- (b) $E \in \mathbb{N}$.
- (c) $E \in P(\mathbb{N})$.
- (d) $E \subset P(\mathbb{N})$.
- (e) $\mathbb{N} \setminus E \in P(\mathbb{N})$.

Ledning: Ett primtal är ett positivt heltal som endast är jämnt delbart med 1 och sig självt.

7. (a) Skriv om summan $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ med hjälp av summasymbolen $\sum$. (2p)
- (b) Skriv om

$$\sum_{n=1}^{21} \frac{1}{n+1}$$

så att summan går från 0. (3p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos Karin kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

Karin