

MATEMATIK, CHALMERS
**Lösningar Matematisk Introduktionskurs – IT, TMA235, HT10,
2010-08-28**

1. *Bevisa deMorgans lag $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$ med hjälp av en sanningstabell.*

Se liknande tabell på sidan 10 i boken, för den andra av DeMorgans lagar. I vårt fall har gör vi en kolumn för $\neg(p \wedge q)$ som får sanningsvärdena S, S, S, F, och en kolumn för $\neg p \vee \neg q$ och konstaterar att denna har samma sanningsvärdena. Man kan även göra en kolumn för hela uttrycket $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$ och konstatera att man får S, S, S, S, alltså att uttrycket är en tautologi, och att vänster- och högerled därmed är ekvivalenta.

Ange motsvarande räkneregler inom mängdlära, och illustrera den med Venndiagram.

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Ett Venndiagram för vänsterledet (krångligt att rita på ordbehandlare, ännu en bra uppgift för en IT-ingenjör i framtiden!) har två mängder och allt utom snittet mellan dessa är färglagt. I ett Venndiagram för högerledet har man igen två mängder och färglägger dels det som står utanför den ena, dels det som står utanför den andra. Det enda som är kvar i vitt är då snittet av de två mängderna.

(8p)

2. *Ange en mängd A med 3 element och en mängd B med 6 element, sådana att $A \cup B$ har 8 element.*

Vi kan ta t.ex $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Då är $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \Delta B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \quad (8p)$$

3. *Låt A , B och C vara delmängder till ett universum U . Vilka av följande påståenden är sanna och vilka är falska? Rätt svar på deluppgift ger +1p, fel svar ger -1p, inget svar ger 0p. Minsta möjliga poäng är 0.*

(6p)

Rita gärna Venndiagram för att se mängderna!

(a) $U^C = \emptyset$: Sant

(b) $A \Delta A^C = U$: Sant

(c) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$: Falskt i allmänhet: hela A är med i högerled.

(d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$: Falskt: $A \cap C$ är med i högerled, ej i vänsterled.

(e) $A \times B = B \times A$: Falskt, Den kartesiska produkten består av ordnade par.

(f) $(A \cup B)^C = A^C \cup B^C$: Falskt (jmf. DeMorgans lagar)

4. Vi sätter in de fem olika värdena på k och får

$$\sum_{k=-2}^2 \frac{k}{k+3} = \frac{-2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{0}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = -\frac{37}{20}.$$

5. (a) Vi får genom att sätta in i formeln att

$$\frac{1}{3} \star \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{\left|\frac{1}{3}\left(-\frac{5}{2}\right)\right| + 1} = \frac{1}{\frac{5}{6} + 1} = \frac{6}{11}.$$

- (b) Ja, ty (vanlig) multiplikation är kommutativ så vi får

$$a \star b = \frac{1}{|ab| + 1} = \frac{1}{|ba| + 1} = b \star a.$$

- (c) Nej, t.ex är

$$1 \star (2 \star 3) = 1 \star \frac{1}{6 + 1} = 1 \star \frac{1}{7} = \frac{1}{\frac{1}{7} + 1} = \frac{7}{8}$$

medan

$$(1 \star 2) \star 3 = \frac{1}{2 + 1} \star 3 = \frac{1}{3} \star 3 = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

- (d) Nej, för om e är en identitet så ska speciellt $e \star 0 = 0$ men

$$e \star 0 = \frac{1}{|e \cdot 0| + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

oavsett vad e är.

6. (a) En av grundtankarna med personnumret är ju att varje person ska få ett unikt nummer, med andra ord att denna funktion är injektiv. Den är inte surjektiv eftersom det finns många fler 12-siffriga tal än det finns människor på jorden och speciellt börjar alla personnummer med en etta eller tvåa.
- (b) Inte heller denna är surjektiv eftersom första siffran i $g(x)$ kommer alltid att vara en etta eller tvåa. Det största möjliga tal man kan få från funktionen idag är garanterat mindre än 20100828 och det minsta är garanterat större än $18950000 - 9999 = 18940001$. Alltså är antalet möjliga värden högst $20100828 - 18940000 = 1160828$ vilket är mindre än antalet personer med svenskt personnummer. Alltså är funktionen inte injektiv.

7. (a)

$$f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \circ g(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 1.$$

- (b) Målmängden för f är inte samma som definitionsmängden för g (och allvarligt problem får man för att $f(0) = 1$ och $g(1)$ är ej definierat).

- (c) Vi ska ta

$$f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \text{med } f_1(x) = x^2 + 1.$$

Med detta val får vi samma målmängd för f_1 som definitionsmängd för g och definitionen är OK eftersom $f(x) = 1$ bara för $x = 0$.