

Matematisk introduktionskurs IT, TMA235
lösningar
2012-09-01

1. (a) Skriv summan

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{1536}$$

med summasymbolen $\sum$.

- (b) Beräkna summan

$$\sum_{k=1}^5 \frac{k}{k+2}$$

exakt. Förkorta svaret så långt det går.

(6p)

Lösning:

- (a)

$$\sum_{i=1}^9 \frac{1}{3 \cdot 2^i}$$

- (b)

$$\sum_{k=1}^5 \frac{k}{k+2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} + \frac{5}{7} = \frac{197}{70}$$

2. Låt $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4\}$, $B = \{x : 3 < x < 11\}$ och $C =$ “mängden av alla udda heltal”.

- (a) Vad är $A \cup B$?

- (b) Vad är $A \cap C$?

- (c) Vad är $B \cap C$?

- (d) Vad är $\mathcal{P}(A)$?

(6p)

Lösning:

- (a) $A \cup B = \{-2, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

- (b) $A \cap C = \emptyset$

- (c) $B \cap C = \{5, 7, 9\}$

- (d) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{-2\}, \{2\}, \{-2, 2\}\}$

3. Betrakta mängderna $M_1 = \{A, B, C, \dots, H\}$ och $M_2 = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$. Med den kartesiska produkten $M_1 \times M_2$ kan vi representera ett schackbräde, där t.ex. $(A, 1) \in M_1 \times M_2$ är den hörnruta där vit spelares vänstra torn startar och $(H, 1) \in M_1 \times M_2$ den hörnruta där dess högra torn startar. Ett datorprogram ska bokföra dragen i en turnering där n stycken partier ska spelas och vi ska skapa en datastruktur för ändamålet.

- (a) Ge ett exempel på ett element $A \in \mathcal{P}(M_1 \times M_2)$, sådant att $|A| = 3$.
- (b) Skapa en lämplig mängd för att få en datastruktur som representerar n stycken schackbräden. Tips: Använd återigen den kartesiska produkten och en mängd med n element.
- (c) Datastrukturen är ännu inte redo för sin uppgift. Följ samma princip som för förra deluppgiften för att åstadkomma så att varje parti har 200 drag vardera.

(8p)

Lösning:

- (a) Ett exempel är $A = \{(A, 1), (G, 8), (H, 3)\}$.
- (b) Låt $M_3 = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Då representerar $M_1 \times M_2 \times M_3$ de n stycken Schackbrädena, indexerade av M_3 . T.ex. $(E, 8, 5)$ är ursprungspositionen $(E, 8)$ för svart kung på schackbräde 5.
- (c) Låt $M_4 = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$. Då representerar $M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4$ de n stycken Schackbrädena med 200 drag vardera, indexerade av M_3 som innan, och av M_4 för vilket drag i ordningen det är. T.ex. $(E, 8, 5, 15)$ är position $(E, 8)$ för parti 5, drag 15.

4. Vi återvänder till schackbrädet i förra uppgiften. Definiera mängden B som mängden av alla olika innehåll en ruta på schackbrädet kan ha. Rutan kan vara tom och så kan den innehålla 12 olika typer av pjäser. Om man tänker sig pjäserna ordnade efter färg och viktighet så är alltså

$$B = \{\text{tom ruta, vit bonde, } \dots, \text{vit kung, svart bonde, } \dots, \text{svart kung}\}.$$

Under ett av partierna, i turneringen som omnämndes i förra uppgiften, observerar vi ett drag och bokför det genom att definiera en funktion $f: M_1 \times M_2 \rightarrow B$ där $f((m_1, m_2)) \in B$ anger vad som finns på ruta $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ på schackbrädet.

(a) Är f injektiv?

(b) Är f surjektiv?

(8p)

Lösning:

(a) Nej! Det finns alltid fler än en tom ruta (m_1, m_2) som kommer att avbilda $f((m_1, m_2)) = \text{tom ruta}$.

(b) Svaret beror på hur många pjäser som är tagna vid den givna observationen. Om det finns pjäser av alla 12 sorter kvar så är f surjektiv. Annars inte.

5. Betrakta $\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}\}$. Vi definierar en unär operator $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ som skiftar elementen (a, b, c, d) ett steg åt höger och lägger till en nolla till vänster, d.v.s. $f((a, b, c, d)) = (0, a, b, c)$. Vi kallar f ett "högerskift". Tyvärr kan vi inte definiera en invers till f eftersom den inte är injektiv och inte heller surjektiv.

(a) Definiera ett nytt högerskift g som är bijektivt, där $g((a, b, c, d)) = (?, a, b, c)$. Bestäm vad som ska vara i elementet längst till vänster efter skiftet, där ? syns. Här finns flera möjligheter men kanske bara ett riktigt naturligt val.

(b) Bestäm inversen.

(8p)

Lösning:

(a) $g((a, b, c, d)) = (d, a, b, c)$ är det naturliga valet.

(b) Vänsterskiftet $g^{-1}((a, b, c, d)) = (b, c, d, a)$ är invers till högerskiftet g .

6. Låt A vara mängden av alla förstgradspolynom med heltalskoefficienter, dvs

$$A = \{f: f(x) = a + bx, a, b \in \mathbb{Z}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Vi definierar en operator, $\star$, på A genom

$$(a + bx) \star (c + dx) = (ac + 3bd) + (ad + bc)x.$$

(a) Är operatören kommutativ?

(b) Är operatören associativ?

(c) Finns det någon identitet? Bestäm i så fall den.

(8p)

Lösning:

(a) Ja, den är kommutativ ty

$$(c+dx)\star(a+bx) = (ca+3db)+(da+cb)x = (ac+3bd)+(ad+bc)x = (a+bx)\star(c+dx)$$

eftersom multiplikation av tal är kommutativ.

(b) Ja, den är associativ ty

$$\begin{aligned} ((a+bx)\star(c+dx)) \star (e+fx) &= ((ac+3bd)+(ad+bc)x)\star(e+fx) \\ &= (ac+3bd)e + 3(ad+bc)f + ((ac+3bd)f + (ad+bc)e)x \\ &= (ace+3bde+3adf+3bcf) + (acf+3bdf+ade+bce)x \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} (a+bx)\star((c+dx)\star(e+fx)) &= (a+bx)\star((ce+3df)+(cf+de)x) \\ &= a(ce+3df) + 3b(cf+de) + (a(cf+de) + b(ce+3df))x \\ &= (ace+3bde+3adf+3bcf) + (acf+3bdf+ade+bce)x \end{aligned}$$

där vi utnyttjar att multiplikation av tal är associativ och kommutativ.

(c) Ja, konstanta poynomet $1 = 1 + 0x$ är en identitet, ty

$$(1+0x)\star(a+bx) = 1 \cdot a + 3 \cdot 0 \cdot b + (1 \cdot b + 0 \cdot x)x = a + bx$$

och vice versa eftersom den är kommutativ.

7. Bevisa den logiska ekvivalensen $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$.

(6p)

Lösning: Sanningstabell...