

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk introduktionskurs IT, TMA235, 2012-09-01, 8.30-12.30

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Oscar Hamlet, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. (a) Skriv summan

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{1536}$$

med summasymbolen $\sum$.

- (b) Beräkna summan

$$\sum_{k=1}^5 \frac{k}{k+2}$$

exakt. Förkorta svaret så långt det går.

(6p)

2. Låt $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4\}$, $B = \{x : 3 < x < 11\}$ och $C =$ "mängden av alla udda heltal".

- (a) Vad är $A \cup B$?
(b) Vad är $A \cap C$?
(c) Vad är $B \cap C$?
(d) Vad är $\mathcal{P}(A)$?

(6p)

3. Betrakta mängderna $M_1 = \{A, B, C, \dots, H\}$ och $M_2 = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$. Med den kartesiska produkten $M_1 \times M_2$ kan vi representera ett schackbräde, där t.ex. $(A, 1) \in M_1 \times M_2$ är den hörnruta där vit spelares vänstra torn startar och $(H, 1) \in M_1 \times M_2$ den hörnruta där dess högra torn startar. Ett datorprogram ska bokföra dragen i en turnering där n stycken partier ska spelas och vi ska skapa en datastruktur för ändamålet.

- (a) Ge ett exempel på ett element $A \in \mathcal{P}(M_1 \times M_2)$, sådant att $|A| = 3$.
(b) Skapa en lämplig mängd för att få en datastruktur som representerar n stycken schackbräden. Tips: Använd återigen den kartesiska produkten och en mängd med n element.
(c) Datastrukturen är ännu inte redo för sin uppgift. Följ samma princip som för förra deluppgiften för att åstadkomma så att varje parti har 200 drag vardera.

(8p)

4. Vi återvänder till schackbrädet i förra uppgiften. Definiera mängden B som mängden av alla olika innehåll en ruta på schackbrädet kan ha. Det kan vara tom och så finns det 12 olika typer av pjäser. Om man tänker sig pjäserna ordnade efter färg och viktighet så är alltså

$$B = \{\text{tom ruta, vit bonde, } \dots, \text{vit kung, svart bonde, } \dots, \text{svart kung}\}.$$

Under ett av partierna, i turneringen som omnämndes i förra uppgiften, observerar vi ett drag och bokför det genom att definiera en funktion $f: M_1 \times M_2 \rightarrow B$ där $f((m_1, m_2)) \in B$ anger vad som finns på ruta $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ på schackbrädet.

(a) Är f injektiv?

(b) Är f surjektiv?

(8p)

5. Betrakta $\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}\}$. Vi definierar en unär operator $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ som skiftar elementen (a, b, c, d) ett steg åt höger och lägger till en nolla till vänster, d.v.s. $f((a, b, c, d)) = (0, a, b, c)$. Vi kallar f ett "högerskift". Tyvärr kan vi inte definiera en invers till f eftersom den inte är injektiv och inte heller surjektiv.

(a) Definiera ett nytt högerskift g som är bijektivt, där $g((a, b, c, d)) = (?, a, b, c)$. Bestäm vad som ska vara i elementet längst till vänster efter skiftet, där ? syns. Här finns flera möjligheter men kanske bara ett riktigt naturligt val.

(b) Bestäm inversen.

(8p)

6. Låt A vara mängden av alla förstegradspolynom med heltalskoefficienter, dvs

$$A = \{f: f(x) = a + bx, a, b \in \mathbb{Z}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Vi definierar en operator, $\star$, på A genom

$$(a + bx) \star (c + dx) = (ac + 3bd) + (ad + bc)x.$$

(a) Är operatoren kommutativ?

(b) Är operatoren associativ?

(c) Finns det någon identitet? Bestäm i så fall den.

(8p)

7. Bevisa den logiska ekvivalensen $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$.

(6p)

Information om när tentan är färdiggrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL!

Adam