

Lösningar till
Tentamen i Introduktionskurs IT, TMA235, 2011-08-27

1. (a) En sanningstabell för utsagan $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ ser t.ex. ut som:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$
F	F	S	S	S	F
F	S	S	F	S	F
S	F	F	S	S	F
S	S	F	F	F	S

- (b) Ja, $P \wedge Q$ är logiskt ekvivalent med $\neg(\neg P \vee \neg Q)$!

Motivering: Sanningstabellen för $P \wedge Q$ är

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	S	F
S	F	F
S	S	S

Vi ser att sanningsvärdet för $P \wedge Q$ alltid är samma som sanningsvärdet för $\neg(\neg P \vee \neg Q)$.

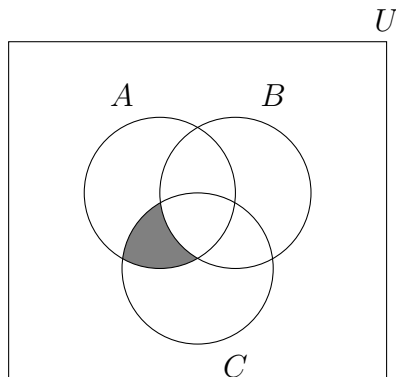
2. (a) Potensmängden $\mathcal{P}(A)$ är mängden av alla delmängder till A . Delmängderna till $A = \{1, 2\}$ är $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ och $\{1, 2\}$. Alltså blir

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

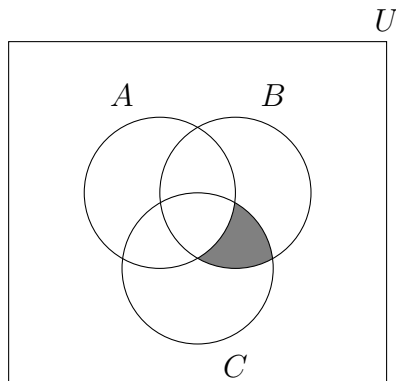
- (b) Den Kartesiska produkten $A \times \mathcal{P}(A)$ är mängden av alla ordnade par (x, y) sådana att $x \in A$ och $y \in \mathcal{P}(A)$. Alltså är

$$\begin{aligned} A \times \mathcal{P}(A) = \{ & (1, \emptyset), (1, \{1\}), (1, \{2\}), (1, \{1, 2\}), \\ & (2, \emptyset), (2, \{1\}), (2, \{2\}), (2, \{1, 2\}) \}. \end{aligned}$$

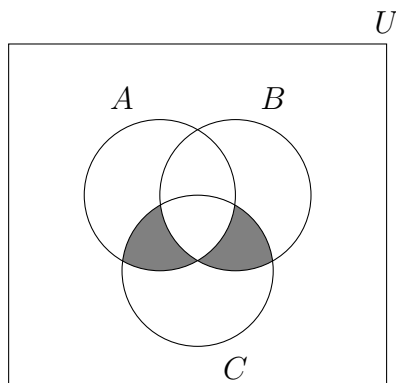
3. (a) Venn-diagram för $A \cap (C \setminus B)$:



Venn-diagram för $B \cap (C \setminus A)$:



Venn-diagram för $(A \Delta B) \cap C$:



- (b) Från Venn-diagrammen ovan verkar det åtminstone rimligt att $(A \cap (C \setminus B)) \cup (B \cap (C \setminus A)) = (A \Delta B) \cap C$.

För att bevisa påståendet kan man argumentera t.ex. så här: För godtyckliga delmängder D , E och F av U gäller

$$D \setminus E = D \cap E^c, \quad (1)$$

$$(D \cup E) \cap F = (D \cap F) \cup (E \cap F), \quad (2)$$

vilket man antingen kommer ihåg från boken eller själv bevisar separat. Givet räknereglerna (1) och (2) kan vi nu bevisa vårt påstående. Vi vet från definitionen av symmetrisk mängddifferens att $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Av räkneregeln (1) följer då att

$$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c).$$

Alltså har vi

$$(A \Delta B) \cap C = ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \cap C.$$

Med hjälp av räkneregeln (2) kan vi skriva om högerledet, och vi får

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap B^c \cap C) \cup (B \cap A^c \cap C). \quad (3)$$

Men enligt räkneregeln (1) igen gäller att $B^c \cap C = C \setminus B$ och $A^c \cap C = C \setminus A$. Alltså kan vi skriva om (3) som

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap (C \setminus B)) \cup (B \cap (C \setminus A)),$$

vilket är vad vi skulle bevisa!

4. (a) Vi får att

$$f \circ g(x) = f(1 - x^2) = \frac{1}{(1 - x^2)^2 + 1} = \frac{1}{2 - 2x^2 + x^4}$$

och

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) = 1 - \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^2 = \frac{x^4 + 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

- (b) Vi får ekvationen

$$1 - x^2 = \frac{1}{x^2 + 1} \iff (1 - x^2)(1 + x^2) = 1 \iff 1 - x^4 = 1,$$

så $x = 0$ är det enda x för vilket $f(x) = g(x)$.

5. När $x < 0$ så är funktionen strängt växande från minus oändligheten och (nästan) upp till -2 . Den antar alltså då alla värden i det öppna intervallet $(-\infty, -2)$ exakt en gång.

När $x \geq 0$ så är också funktionen strängt växande och nu från 0 upp mot oändligheten. Den antar alltså då alla värden i det halvöppna intervallet $[0, \infty)$ exakt en gång.

- (a) Vi ser alltså att funktionen inte antar samma värde mer än en gång och är därför injektiv.
(b) Resonemanget ovan ger också att

$$f(\mathbb{R}) = (-\infty, -2) \cup [0, \infty) \subset \mathbb{R}$$

så värdemängden är en äkta delmängd av målmängden och därför är den inte surjektiv.

- (c) Eftersom den inte är surjektiv är den inte heller bijektiv och alltså inte inverterbar.

6. (a) Ja, den är kommutativ ty

$$(c+dx) \star (a+bx) = (ca-db) + (da+cb)x = (ac-bd) + (ad+bc)x = (a+bx) \star (c+dx)$$

eftersom multiplikation av tal är kommutativ.

- (b) Ja, den är associativ ty

$$\begin{aligned} ((a+bx) \star (c+dx)) \star (e+fx) &= ((ac-bd) + (ad+bc)x) \star (e+fx) \\ &= (ac-bd)e - (ad+bc)f + ((ac-bd)f + (ad+bc)e)x \\ &= (ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce)x \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} (a+bx) \star ((c+dx) \star (e+fx)) &= (a+bx) \star ((ce-df) + (cf+de)x) \\ &= a(ce-df) - b(cf+de) + (a(cf+de) + b(ce-df))x \\ &= (ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce)x \end{aligned}$$

där vi utnyttjar att multiplikation av tal är associativ och kommutativ.

- (c) Ja, konstanta poynomet $1 = 1 + 0x$ är en identitet, ty

$$(1 + 0x) \star (a + bx) = 1 \cdot a - 0 \cdot b + (1 \cdot b + 0 \cdot x)x = a + bx$$

och vice versa eftersom den är kommutativ.

- (d) Om man sätter $x^2 = -1$ så är operatorn helt enkelt multiplikation av poynom med denna extra regel, så i själva verket är det multiplikation av komplexa tal om man tänker sig att $a + bx$ betyder $a + bi$.