MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Matematik IT, del B (TMA245b) 2001-12-21.

Lösningar:

1. De tre första punkterna ligger inte på en linje så de ligger på ett unikt plan. Riktningsvektorer för planet är $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -2) - (1, -1, -1) = (-1, 2, -1)$ och $\mathbf{v}_2 = (4, -1, -2) - (1, -1, -1) = (3, 0, -1)$. En normalvektor ges då av

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, -4, -6) = -2(1, 2, 3).$$

Ekvationen för planet är därmed $x + 2y + 3z + d = 0$ och insättning av $(1, -1, -1)$ ger $d = -1 - 2(-1) - 3(-1) = 4$. Vi testar med den fjärde punkten och får $2 + 2(-3) + 3 \cdot 4 + 4 = 12 \neq 0$ och alltså ligger inte den på planet som de andra ligger på och därmed ligger inte alla fyra punkterna på ett plan.

2. Om Q är en godtycklig punkt i planet så gäller att avståndet från P till planet ges av längden av den ortogonala projektionen, $\overrightarrow{QP}_{\mathbf{n}}$, av $\overrightarrow{QP}$ på normalen till planet.

Vi väljer $Q = (1, -1, -1)$. Då är $\overrightarrow{QP} = (0\ 1\ 4)^t$ och $\mathbf{n} = (1/\sqrt{14})(1\ 2\ 3)^t$ är en normerad normalvektor. Det sökta avståndet blir då

$$\left|\overrightarrow{QP}_{\mathbf{n}}\right| = \left|(\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP})\mathbf{n}\right| = \left|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP}\right| = \frac{1}{\sqrt{14}}(2 + 12) = \sqrt{14}.$$

3. Om P är matrisen för projektionen och R är matrisen för rotationen så är den sökta matrisen $A = RP$.

För projektionen är $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ oförändrade och $\mathbf{e}_z$ avbildas på nollvektorn så

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För rotationen är $\mathbf{e}_x$ oförändrad, $\mathbf{e}_y$ avbildas på $\mathbf{e}_z$ och $\mathbf{e}_z$ avbildas på $-\mathbf{e}_y$ så

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Därmed är den sökta matrisen

$$A = RP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 2 & a & 4\\ 2 & a & a & 2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -2 & a+2 & -2\\ 0 & a-4 & a+2 & -4\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & \frac{a+2}{2} & -1\\ 0 & 0 & \frac{a^2}{2}-2 & -a\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -\frac{a+2}{2} & 1\\ 0 & 0 & a^2-4 & -2a\end{pmatrix}.$$

Denna har ej unik lösning om och endast om $a^2-4=0$, d v s om och endast om $a=\pm 2$. I dessa fall blir $-2a=\mp 4$ så ekvationssystemet saknar då lösning.

5. De fem punkterna ger följande ekvationssystem:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 4 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 6\\ 8\\ 7\\ 4\end{pmatrix}.$$

Om vi betecknar koefficientmatrisen med A och högerledsvektorn med $\mathbf{b}$ så ges minstakvadratlösningen av lösningen till $A^tA\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$. Multiplikation med A^t ger

$$A^tA = \begin{pmatrix}5 & 10 & 30\\ 10 & 30 & 100\\ 30 & 100 & 354\end{pmatrix} \text{ och } A^t\mathbf{b} = \begin{pmatrix}28\\ 59\\ 165\end{pmatrix}.$$

Vi löser detta ekvationssystem med Gausselimination

$$\begin{pmatrix}5 & 10 & 30 & 28\\ 10 & 30 & 100 & 59\\ 30 & 100 & 354 & 165\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 6 & \frac{28}{5}\\ 0 & 10 & 40 & 3\\ 0 & 40 & 174 & -3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 6 & \frac{28}{5}\\ 0 & 1 & 4 & \frac{3}{10}\\ 0 & 0 & 14 & -15\end{pmatrix},$$

vilket ger $c=-15/14$, $b=3/10-4(-15/14)=321/70$ och $a=28/5-6(-15/14)-2(321/70)=20/7$ så svaret blir

$$y = \frac{20}{7} + \frac{321}{70}x - \frac{15}{14}x^2.$$

6. (a) Följer av att likhet har motsvarande egenskaper, t ex är den transitiv eftersom om $a^2+b^2=c^2+d^2$ och $c^2+d^2=e^2+f^2$ så är uppenbarligen $a^2+b^2=e^2+f^2$.

   (b) Den ges av

$$[(1,0)] = \{(a,b) : a^2+b^2 = 1^2+0^2 = 1\}$$

   vilket är alla par (a,b) på cirkeln med centrum i origo och radien 1.

   (c) De ges av alla cirklar med centrum i origo plus $\{(0,0)\}$.

7. Låt $ABCD$ vara den givna parallellogrammen och låt M_1 vara mittpunkten på diagonalen från A till C och M_2 mittpunkten på diagonalen från B till D. Vi ska visa att $M_1 = M_2$. Det är ekvivalent att visa att $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AM_2}$. Villkoren att de är mittpunkter och att $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ ger

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

och

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM_2} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM_1}\end{aligned}$$

och därmed är saken klar.

8. Förutsättningarna ger att

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{pmatrix}$$

med $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Den karakteristiska ekvationen blir då

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)(\beta-\lambda) - (1-\alpha)(1-\beta) \\ &= \lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + (\alpha+\beta-1) = (\lambda-1)(\lambda-(\alpha+\beta-1)),\end{aligned}$$

så att A har alltså egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = \alpha+\beta-1$. Dessutom gäller att

$\lambda_2 = \alpha+\beta-1 \geq 0+0-1 \geq -1$ och $\lambda_2 = \alpha+\beta-1 \leq 1+1-1 \leq 1$

och därmed är saken klar.