MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Matematik IT, del B (TMA245b) 2003-08-27.

Lösningar:

1. Normalen till planet genom $(1,1,1)$ har ekvationen

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

Sätter vi in denna i planets ekvation och löser ut t så får vi den punkt som är den ortogonala projektionen av $(1,1,1)$ på planet. Vi får

$$0 = 1 + t + 2(1 + 2t) + 3(1 + 3t) + 4 = 10 + 14t,$$

så $t = -10/14 = -5/7$. Den sökta punkten är alltså

$$\begin{cases} x = 1 - 5/7 = 2/7 \\ y = 1 - 2 \cdot 5/7 = -3/7 \\ z = 1 - 3 \cdot 5/7 - 8/7. \end{cases}$$

2. Vi beräknar determinanten av matrisen med de tre vektorerna som kolumnerer. Absolutbeloppet av denna ger volymen av parallelltrapetsen som de spänner upp. Vi får med hjälp av elementära radoperationer att

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & -21/2 & -7 \\ 0 & -7 & -21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & -21/2 & -7 \\ 0 & 0 & -49/3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-21/2) \cdot (-49/3) = 7 \cdot 49 = 343. \end{aligned}$$

Alternativt kunde man observerat att de är ortogonala och i själva verket 7 gånger ON-basen i uppgift 7, så vi har en kub med sidan 7. Detta ger ju också att volymen är $7^3 = 343$.

3. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & a-b & -1 & 2 \\ 2 & 4 & b+1 & a-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & a-b & -1 & 2 \\ 0 & 0 & b-5 & a-2 \end{pmatrix}$$

Från detta ser vi att vi har determinanten lika med noll om och endast om $a = b$ eller $b = 5$.

Om $b = 5$ så blir sista ekvationen $0 = a - 2$ så då måste $a = 2$ för att vi ska kunna ha någon lösning. Detta fallet ger en lösning eftersom det inte blir några problem med de två första ekvationerna.

Om $a = b$, så får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & b-5 & b-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3b-12. \end{pmatrix}$$

Denna har (oändligt många) lösningar om och endast om $3b - 12 = 0$, d v s $b = 4$.

Svaret är alltså: $(2, 5)$ och $(4, 4)$.

4. Vi sätter upp totalmatrisen för ekvationerna för de två planen och gör Gauss-elimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4. \end{pmatrix}$$

Vi sätter $z = t$ och får genom att lösa ut y och sedan x parametriseringen

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -4 - 2t \\ z = t. \end{cases}$$

5. Vi utnyttjar definitionen av skalärprodukt som säger att vinkeln α mellan två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ satisfierar

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\,\mathbf{x}\,||\,\mathbf{y}\,|}.$$

Vinklarna mellan paren av de tre vektorerna uppfyller därmed

$$\begin{aligned} \cos\gamma_1 &= \frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{|\,\mathbf{v}_1\,||\,\mathbf{v}_2\,|} = \frac{-6}{\sqrt{14}\cdot 3} = -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ \cos\gamma_2 &= \frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3}{|\,\mathbf{v}_1\,||\,\mathbf{v}_3\,|} = \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{17}} \\ \cos\gamma_3 &= \frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3}{|\,\mathbf{v}_2\,||\,\mathbf{v}_3\,|} = \frac{-12}{3\sqrt{17}} = -\frac{4}{\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Eftersom vinkeln blir större då cosinus för den minskar (i intervallet $[0, \pi]$ som är det som är intressant) och

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 = \frac{2}{7} < \frac{16}{17} = \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2,$$

så följer det att γ_3 är störst. Svaret är alltså vinkeln mellan $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$.

6. (a) Vektorn $\mathbf{u} = \binom{1}{3}$ är en riktningsvektor för linjen som vi kallar L. En godtycklig vektor $\mathbf{v} = \binom{x}{y}$ projiceras på

$$\mathbf{v}_L = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\,\mathbf{u}\,|^2}\cdot\mathbf{u} = \frac{x+3y}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} x+3y \\ 3x+9y \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matrisen för avbildningen är alltså

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

(b) Linjen $y = 3x + 1$ går inte igenom origo och därmed är projektionen på linjen inte en linjär avbildning. Däremot är den en affin avbildning som man lämpligen delar upp i tre delavbildningar. Först flyttas origo upp ett steg i y-led (för alla punkter betyder detta att y-koordinaten minskas med ett). Projektionen på linjen $y = 3x+1$ svarar nu mot den linjära avbildningen från första deluppgiften och har alltså matrisen A. Till slut flyttas origo tillbaka till dess ursprungliga plats. Sätt

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och låt den linjära avbildningen från första deluppgiften vara $h(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Det som vi just beskrev blir då

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= g \circ h \circ g^{-1}(\mathbf{x}) = g\left(A\left(\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= A\left(\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\mathbf{x} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\mathbf{x} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Svaret är alltså samma A som i första deluppgiften och $\mathbf{b} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. (a) Låt $M = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3)$. Vi ska visa att vektorerna är parvis ortogonala och har längd 1 vilket är ekvivalent med att $M^tM = I$. Eftersom $2^2 + 3^2 + 6^2 = 4 + 9 + 36 = 49 = 7^2$ så har alla vektorerna längd 1. Dessutom är $2 \cdot 3 + 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 2 = 6 - 18 + 12 = 0$ så $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala. På samma sätt får man att skalärprodukten mellan $\mathbf{v}_3$ och de andra vektorerna är 0 och därmed att de är parvis ortogonala.

(b) Från satserna om diagonalisering så vet vi att en matris A som uppfyller kraven ges av

$$A = MDM^{-1},$$

där D är en diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen. Observera att M är en ON-matris så $M^{-1} = M^t$. Den är dessutom symmetrisk så i själva verket är $M^{-1} = M$. Vi får alltså

$$A = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 130 & 6 & -30 \\ 6 & 93 & -24 \\ -30 & -24 & 71 \end{pmatrix}$$

8. Antag att A är symmetrisk, d v s att $A = A^t$. Låt $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vara kolumnerna i A. Då gäller att

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} = A^t\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^t \\ \mathbf{a}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^t \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^t\mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2^t\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^t\mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

Med andra ord så är $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = 0$ för alla i så $\mathbf{x}$ är ortogonal mot alla kolumnvektorerna, vilket var precis vad vi skulle visa.