MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Matematik IT, del B (TMA245b) 2003-04-16.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Ester Fjellander, 0740-459022.

1. Vad är avståndet från punkten $(1,1,1)$ till linjen

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 6+2t \\ z = 9+3t \end{cases}$$

(6p)

2. Är vektorerna $\mathbf{v}_1 = (3\ 2\ \ -1)^t$, $\mathbf{v}_2 = (1\ 6\ 2)^t$ och $\mathbf{v}_3 = (9\ 2\ 4)^t$ linjärt oberoende? (6p)

3. (a) Bestäm ekvationen (på parameterform) för den linje L som går genom punkterna $(1,3,4)$ och $(2,-1,5)$.
   (b) Bestäm ekvationen (på parameterfri form) för ett plan som innehåller L. (7p)

4. Låt A vara matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildningen som består av rotation $\frac{\pi}{4}$ radianer kring y-axeln i den riktning som bestäms av att positiva x-axeln vrids mot positiva z-axeln. Låt B vara matrisen för spegling i yz-planet. Beräkna matrisen för den linjära avbildning som först roterar enligt A och sedan speglar enligt B. (6p)

5. Motivera att alla lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

utgör ett plan i $\mathbb{R}^5$ och bestäm en ekvation på parameterform för detta plan. (6p)

(vgv)

6. (a) Låt A vara matrisen (i standardbasen) för spegling i xy-planet. Visa att $\det A = -1$.

   (b) Antag att två matriser B respektive C är relaterade genom

$$B = PCP^{-1},$$

   för någon inverterbar matris P. Visa att $\det B = \det C$.

   (c) Låt nu A vara matrisen (i standardbasen) för spegling i $\mathbb{R}^3$ i ett (godtyckligt) plan genom origo. Visa att $\det A = -1$ (Tips: Det kan vara bra att utnyttja de två tidigare deluppgifterna.) (7p)

7. Låt R_n vara antalet rävar i England år n och K_n antalet kaniner i England år n. Vi antar att dessa är relaterade rekursivt enligt

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= \tfrac{13}{30} R_n + \tfrac{1}{15} K_n \\ K_{n+1} &= -\tfrac{14}{3} R_n + \tfrac{47}{30} K_n \end{aligned}$$

   för alla $n \geq 0$.

   (a) Bestäm en matris A sådan att

$$\begin{pmatrix} R_n \\ K_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} R_0 \\ K_0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Matrisen ni bestämde (om ni gjorde rätt) har egenvärdena 0.9 respektive 1.1 med motsvarande egenvektorer $\binom{1}{7}$ respektive $\binom{1}{10}$. Vad händer med populationerna av rävar och kaniner om det från början finns exakt 7 gånger så många kaniner som rävar? Vad händer om det från början inte finns exakt 7 gånger så många kaniner som rävar? (6p)

8. Låt A vara matrisen för den linjära avbildning i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonal projektion på det plan genom origo som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

   (a) Vad har A för egenvärden?

   (b) Ge tre linjärt oberoende egenvektorer till A.

   Svaren ska motiveras. (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 23 april. Resultaten anslås i källaren på Matematiskt Centrum och tentorna kan avhämtas i mottagningsrummet på Matematiskt Centrum mellan 12:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.