MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Matematik IT, del B (TMA245b) 2002-12-19.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Ester Fjellander, 0740-459022.

1. Bestäm matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildning i $\mathbb{R}^2$ som består av att första spegla i linjen $y = x$ och sedan projicera ortogonalt på x-axeln. (6p)

2. Vad är avståndet från punkten $P = (1, 1, 1)$ till planet $x + 2y + 3z + 4 = 0$? (6p)

3. Bestäm ekvationen (på parameterfri form) för planet som innehåller punkterna $P_1 = (1, 2, 3)$, $P_2 = (4, 5, 6)$ och $P_3 = (0, 1, 3)$. (6p)

4. (a) För vilka värden på a saknar följande ekvationssystem lösning?

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ (1-a)y + az = 2 \\ a^2 z = a + 1 \end{cases}$$

   (b) Samma fråga för:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x - (1+a)y + (a-3)z = 1 \\ x + (2 - a + a^2)y + 3z = 2 - a \end{cases}$$

(7p)

5. Låt

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Beräkna A^{1000}. (6p)

(vgv)

6. Betrakta ON-basen $F = (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3)$, där

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 2/7 \\ -3/7 \end{pmatrix}.$$

Låt L vara den linjära avbildning som ges av ortogonal projektion på planet genom origo som spänns upp av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$.

(a) Bestäm matrisen för L i basen F.

(b) Bestäm matrisen för L i standardbasen.

Alternativt: De som läste kursen 2001 kan om de så önskar istället (men INTE både och) lösa:

Bestäm en explicit formel för a_n som definieras rekursivt genom

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_1 = 0, \\ a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2} + 11 - 4n, \quad n > 1. \end{cases}$$

(7p)

7. Biluthyrningsfirman Hyr-Ett-Vrak har två kontor, ett på Centralen och ett på Landvetter. Av de bilar som är på Centralen i början av en vecka är 70% kvar där i början av veckan därpå, 10% finns på Landvetter och 20% är uthyrda. För Landvetter är motsvarande siffror att 60% är kvar på Landvetter, 10% är på Centralen och 30% är uthyrda. Av de som var uthyrda i början av en vecka är 50% det också veckan därpå, 30% är på Centralen och 20% på Landvetter. Till ägarens stora förvåning (han borde kanske ta en kurs i linjär algebra) så visar det sig att fördelningen av bilar stabiliserar sig efter ett tag. Bestäm fördelningen av bilar på Centralen, på Landvetter respektive som är uthyrda efter att den stabiliserat sig. (6p)

8. Antag att vi har en följd av vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Vi definierar en ny följd av vektorer rekursivt enligt:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_i}{|\mathbf{u}_i|^2} \mathbf{u}_i, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Visa att $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är ortogonala.

(b) Visa att för alla $i \neq j$ med $1 \leq i, j \leq n$ gäller att $\mathbf{u}_i$ och $\mathbf{u}_j$ är ortogonala.

(6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 7 januari. Resultaten anslås i källaren på Matematiskt Centrum och tentorna kan avhämtas i mottagningsrummet på Matematiskt Centrum mellan 12:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.