Matematik Chalmers

Tentamen i tma245 Matematik IT del B den 16 april 2004, kl. 14.15-18.15

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Micke Persson, tel. 0739-779268

1. (6p) Vilken är vinkeln mellan linjen L, given av

$$\begin{cases} x = 1 + 3s + 4t \\ y = -3 - 2s + t \\ z = 2 - s - t \end{cases}$$

och planet $\pi : 2x - y - z = 1$?

2. (6p) För vilka värden på a saknar följande ekvationssystem lösning?

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y + az = 7 \end{cases}$$

3. (6p) I ett visst land fanns en gång endast ett sorts tvättmedel, ”Mjuk”, men en vacker dag introducerades det nya tvättmedlet ”Len”. Sedan den dagen började folk i landet till viss del att röra sig mellan de två märkena på så sätt att av de som ett år använt Mjuk var det $4/5$ som använde Mjuk även nästa år, medan $1/5$ bytt till Len. Av de som använt Len var det $5/6$ som fortfarande använde Len medan $1/6$ bytt till Mjuk.

   Hur stor andel av befolkningen använde Len n år efter dess introduktion på marknaden? Vad blir Lens marknadsandel i det långa loppet?

4. (6p) Ett plan i rummet har på parameterform ekvationen

$$\begin{cases} x = 2s - t \\ y = s - t \\ z = s + 3t \end{cases}$$

Ange planets ekvation på normalform och ange matrisen för den linjära avbildning som ges av spegling i planet.

5. (6p) Antag att A är en inverterbar 3×3-matris och skriv $\mathbf{u}^t$, $\mathbf{v}^t$ respektive $\mathbf{w}^t$ för A's rader (dvs så att $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är A's radvektorer på kolonnform). Låt

$$B = \left[\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})} \quad \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})} \quad \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})} \right].$$

Visa att $AB = I$ (dvs att $B = A^{-1}$).

6. (6p) En 3×3-matris A har egenvärdena 0, 1 och 2 med egenvektorerna $(1,1,1)^t$, $(1,2,-3)^t$ respektive $(-5,4,1)^t$. Vilken matris är A?

7. (6p) Ett plan genom origo i rummet spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Matrisen A svarar mot ortogonal projektion på detta plan. Vad har A för egenvärden och vilka egenvektorer hör ihop med dessa?

8. (8p) Man säger att $n \times n$-matrisen A är konjugerad med $n \times n$-matrisen B om det finns en inverterbar matris P sådan att $A = PBP^{-1}$.

   (a) Visa att relationen "är konjugerad med" är en ekvivalensrelation på mängden av alla $n \times n$-matriser.

   (b) Visa att om A och B är konjugerade så har de samma egenvärden.

/Johan Jonasson

Lösningar

1. Denna uppgift är felformulerad: Linjen som anges är i själva verket ett plan. Den linje som egentligen avses är normallinjen till detta plan. Normallinjens riktningsvektor fås som vektorprodukten av planets två riktningsvektorer $(3, -2, , -1)^t$ och $(4, 1, -1)^t$ och blir alltså $\mathbf{u} = (3, -1, 11)$. Vinkeln mellan denna vektor och planet π kan sedan skrivas som $\pi/2 - |\alpha|$ där α är vinkeln mellan vektorn och π's normalvektor. Planet π har normalvektor $\mathbf{v} = (2, -1, -1)^t$, så

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{-4}{\sqrt{786}}$$

varför den sökta vinkeln är

$$\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{4}{\sqrt{786}}.$$

2. Determinanten till systemets koefficientmatris är 0 endast då $a = -5/2$, så för övriga a har systemet en entydig lösning. Genom att kontrollera fallet $a = -5/2$ separat med Gausselimination ser man att man då får oändligt många lösningar. Alltså finns det inte något a för vilket systemet saknar lösning.

3. Om man låter $\mathbf{x}_n = (m_n, l_n)^t$ där m_n och l_n är andelarna av befolkningen som använder Mjuk respektive Len efter n år, får man

$$\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0$$

där $\mathbf{x}_0 = (1, 0)^t$ och

$$A = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/6 \\ 1/5 & 5/6 \end{bmatrix}.$$

Genom att lösa ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ får man att A's egenvärden är 1 och $19/30$. Egenvektorer blir till exempel $(5, 6)^t$ respektive $(1, -1)^t$. Man kan alltså skriva

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

där $D = diag(1, 19/30)$ och P har egenvektorerna som kolonner. Genom att beräkna och sätta in i ekvationen ovan följer att

$$\mathbf{x}_n = \frac{1}{11}(5 + 6(\frac{19}{30})^n, 6 - 6(\frac{19}{30})^n)^t.$$

Speciellt ser vi att Lens marknadsandel i långa loppet blir $6/11$.

4. Planets normalvektor får vi som vektorprodukten av de två riktningsvektorerna $(2,1,1)^t$ och $(-1,-1,3)^t$, dvs $(4,-7,-1)^t$. Planets ekvation blir alltså $4x - 7y - x = 0$.

   När en vektor $\mathbf{v}$ speglas genom ett plan med enhetsnormalvektor $\mathbf{n}$ avbildas $\mathbf{v}$ på $\mathbf{v} - 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} = (I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^t)\mathbf{v}$. Således blir matrisen för avbildningen $I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^t$ som i detta fall blir

$$\frac{1}{33}\begin{bmatrix} 17 & 28 & 4 \\ 28 & -16 & -7 \\ 4 & -7 & 32 \end{bmatrix}.$$

5. Elementen utanför huvuddiagonalen i AB blir 0 pga att vektorprodukten av två vektorer per definition är ortogonal mot de två ingående vektorerna. På huvuddiagonalen blir täljaren och nämnaren desamma (och nollskilda pga av att A är inverterbar) så att dessa element är 1.

6. De tre egenvektorerna är parvis ortogonala. Därför gäller att $A = PDP^t$ där $D = diag(0,1,2)$ och P har de normaliserade egenvektorerna som kolonner i motsvarande ordning. Vi får alltså:

$$A = \frac{1}{14}(1,2,-3)^t(1,2,-3) + 2\frac{1}{42}(-5,4,1)^t(-5,4,1)$$
$$= \begin{bmatrix} 53 & -34 & -19 \\ -34 & 44 & -10 \\ -19 & -10 & 29 \end{bmatrix}.$$

7. Alla vektorer som ligger i planet som spänns av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är opåverkade av transormation med A varför dessa är egenvektorer till egenvärdet 1. De vektorer som är ortogonala mot planet avbildas alla på nollvektorn och är således egenvektorer till egenvärdet 0. Fler egenvärden finns ej.

8. Relationen är reflexiv eftersom $A = IAI^{-1}$ och symmetrisk eftersom $A = PBP^{-1}$ medför att $B = P^{-1}AP$ och P^{-1} är inverterbar. Transitiviteten följer av att om $A = PBP^{-1}$ och $B = QCQ^{-1}$ så är $A = PQCQ^{-1}P^{-1} = (PQ)C(PQ)^{-1}$. Alltså är relationen en ekvivalensrelation.

   Att två konjugerade matriser har samma egenvärden följer av det faktum att egenvärdena till A är lösningarna till ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ och att $\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det P \det(A - \lambda I)\det P^{-1} = \det(A - \lambda I)$ där den sista likheten följer av att $\det P^{-1} = 1/\det P$.