| | |
|---|---|
| **MATEMATIK** | **Tentamensskrivning i matematik för Z1:** |
| **Chalmers Tekniska Högskola** | **TMA263 Matematisk analys i flera variabler** |
| | Datum: 1997-08-18 kl 14.15-18.15 |
| Ange CTH- eller personnummer | Hjälpmedel: Formelblad, dock ej räknedosa |
| samt linje, inskrivningsår och namn. | Telefonvakt: |

1. Bestäm talet $c$ så att planet $x + 2y + z = c$ är tangentplan till ytan $z = x^2 + y^2$. (5p)

2. Beräkna integralen
$$\iint_D \sqrt{x^2 - y^2}\, dx\, dy$$
där $D$ är kvadraten med hörnpunkterna (0,0), (1,1), (1,-1) och (2,0). (6p)

3. Om $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$ så kallas ekvationerna
$$u'_x = v'_y \text{ och } u'_y = -v'_x$$
Cauchy-Riemanns ekvationer. Antag att $v(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ och bestäm alla $u = u(x, y)$ sådana att $u$ och $v$ satisfierar Cauchy-Riemanns ekvationer. (6p)

4. Antag att $a$ och $b$ är positiva reella tal och att $n$ är ett positivt *jämnt* heltal.
   (a) Rita i ett koordinatsystem kurvorna $x^n + y^n = 1$ för $n = 2$ och $n = 4$. (Figur räcker men markera vilken kurva som är vilken.) (1p)
   (b) Antag att $a$ och $b$ är positiva tal och bestäm det största värde som $ax + by$ antar på kurvan $x^n + y^n = 1$. (4p)
   (c) Vad skulle hända i (b) om man skulle låta $n$ vara ett udda tal, t ex $n = 3$ ? (2p)

5. Betrakta följande tre funktioner
$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4},\quad g(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \text{ och } h(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^3 + y^3}.$$
   (a) Visa att $f(x, y)$ inte har ett gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$. (2p)
   (b) Visa att $g(x, y)$ har ett gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$. (3p)
   (c) Undersök om $h(x, y)$ har ett gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$. (3p)

6. Låt
$$\mathbf{u} = (e^{x^2}, -2xye^{x^2}, e^{x^2+y^2} + z^3)$$
och beräkna ytintegralen
$$\iint_Y \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}\, dS$$
där $Y$ är halvsfären $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ med uppåtriktad normal $\mathbf{N}$. (6p)

7. (a) Ange definitionen av att ett fält $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält. Ge sedan exempel på ett fält som är ett potentialfält och ett som inte är det. (3p)
   (b) Redogör för begreppen funktionalmatris, funktionaldeterminant och linjarisering. (3p)

8. Formulera och bevisa kedjeregeln för en sammansatt funktion $f(\mathbf{x}(t))$ där $f$ är en reellvärd funktion av två variabler och $t$ är en reell variabel. (6p)

Lycka till!/ J-E A

OBS! Formelblad på baksidan.