MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH- eller personnummer samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i matematik för Z1:
TMA263 Matematisk analys i flera variabler
Datum: 1998-01-13 kl 14.15-18.15
Hjälpmedel: Formelblad, dock ej räknedosa
Telefonvakt: Fredrik Ekstedt ankn 5308

---

1. Bestäm alla par av tal a och b för vilka vektorfältet $(axy+y^3, x^2+bxy^2)$ är ett potentialfält. Bestäm också i förekommande fall en potentialfunktion. (6p)

2. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D \frac{\sin^2 \pi(x+y)}{1+(x-y)^2}\, dx\, dy.$$
där D är kvadraten med hörnpunkterna $(\pm 1, 0)$ och $(0, \pm 1)$. (6p)

3. Transformera differentialekvationen
$$z''_{xx} - 4z''_{yy} = 1$$
genom variabelsubstitutionen $u = ax + y$, $v = ax - y$. Lös sedan den ursprungliga ekvationen genom att välja a lämpligt. (8p)

4. En person anser sig varje vecka behöva konsumera tre olika produkter X, Y och Z i kvantiteterna x, y respektive z. Priset per enhet av de olika produkterna är 2, 3 respektive 4 kronor och de säljs i lös vikt. Han är villig att spendera 180 kronor per vecka. För att analysera hur mycket av varje produkt han skall konsumera per vecka definierar han en nyttofunktion U genom $U(x, y, z) = xyz$. Hur mycket av varje produkt skall han konsumera per vecka om han vill maximera nyttofunktionen $U(x, y, z)$ vid kostnaden 180 kronor per vecka? (6p)

5. Beräkna ytintegralen
$$\iint_Y (x^3, y^3, z^3) \cdot \mathbf{N}\, dS$$
där Y är sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ med utåtriktad normal $\mathbf{N}$. (6p)

6. Sambandet
$$e^z + xz - e^y = 0$$
definierar i en omgivning av (0,0,0) implicit z som funktion av x och y. Denna funktion har kontinuerliga partiella derivator av ordning 2. Bestäm taylorpolynomet av ordning 2 i (0,0) för funktionen $z = z(x, y)$. (6p)

7. (a) Definiera begreppen inre punkt, yttre punkt och randpunkt till en mängd i $\mathbf{R}^n$ (2p)
   (b) Bestäm en mängd i $\mathbf{R}^2$ som har (1,1) som yttre punkt, (2,1) som randpunkt och (2,2) som inre punkt. Det räcker inte med figur utan mängden skall vara definierad analytiskt. (2p)
   (c) Definiera begreppen öppen respektive sluten mängd. Ge också ett exempel på en begränsad mängd i $\mathbf{R}^2$ som varken är öppen eller sluten. (2p)

8. Betrakta en funktion $f(x, y)$ av två variabler. Visa att om f har kontinuerliga partiella derivator och (a, b) är en punkt där gradienten för f är $\neq (0, 0)$, så är denna gradient en normalvektor till nivåkurvan i punkten (a, b). (6p)

Lycka till!/ J-E A

OBS! Formelblad på baksidan.