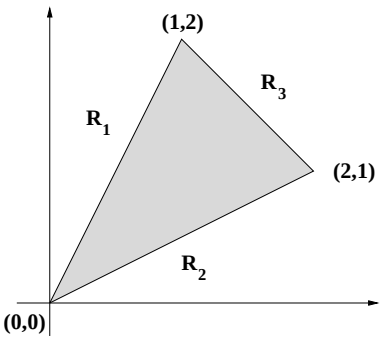
Lösningar till i Flervariabelanalys för Z1 den 30/5-97

1. (a) Eftersom $f'_x = y-1$ och $f'_y = x-1$ är $(1,1)$ den enda stationära punkten. För att undersöka dess typ beräknar vi andraderivatorna och ser att $f''_{xx} = 0$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = 0$. Den kvadratiska form vi då skall undersöka är $Q(h,k) = 0 \cdot h^2 + 2 \cdot 1 \cdot hk + 0 \cdot k^2 = hk$. Men denna kvadratiska form är indefinit (exempelvis ser man att $Q(1,1) > 0$ medan $Q(1,-1) < 0$), så den stationära punkten är en sadelpunkt.

   (b) Funktionen är kontinuerlig och triangelytan är sluten och begränsad. Alltså har funktionen såväl ett största som ett minsta värde. Eftersom funktionen är deriverbar kan dessa värden bara antas i inre stationära punkter eller randpunkter. Enligt (a) är den stationära punkten en sadelpunkt så enda möjligheten för maximum och minimum är randpunkter. Med beteckningar enligt figuren kan randen beskrivas genom



R_1 : $y = 2x$, $0 \le x \le 1$ med
$f(x,y) = f(x,2x) = \varphi_1(x)$
R_2 : $x = 2y$, $0 \le y \le 1$ med
$f(x,y) = f(2y,y) = \varphi_2(y)$
R_3 : $x + y = 3$, $1 \le x \le 2$ med
$f(x,y) = f(x,3-x) = \varphi_3(x)$

På randen har funktionen max/min antingen i en hörnpunkt eller i en punkt där någon av φ_1, φ_2 eller φ_3 har derivatan 0. Hörnpunkterna är (0,0), (1,2) och (2,1) med funktionsvärdena

$$f(0,0) = 0,\ f(1,2) = -1 \text{ respektive } f(2,1) = -1.$$

För φ-funktionerna har vi först

$$\varphi_1(x) = f(x,2x) = 2x^2 - 3x,\ 0 \le x \le 1$$

som ger $\varphi_1'(x) = 4x - 3$ så att $\varphi_1'(x) = 0$ precis då x=3/4, som ligger inom det rätta intervallet. Motsvarande för φ_2 ger $\varphi_2'(y) = 0$ exakt då $y = 3/4$ medan vi för φ_3 har

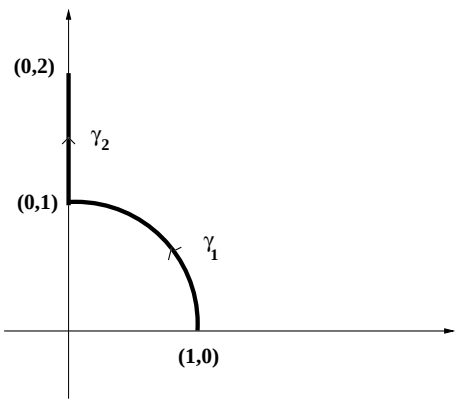
$$\varphi_3(x) = f(x,3-x) = 3x - 3x^2 - 3,\ 1 \le x \le 2$$

och alltså $\varphi_3'(x) = 0$ precis då $x = 3/2$, som ju ligger i det rätta intervallet.
Förutom hörnpunkterna får alltså följande värden vara med och konkurrera om att ge max/min:

$$\varphi_1(\frac{3}{4}) = -\frac{9}{8},\ \varphi_2(\frac{3}{4}) = -\frac{9}{8},\ \text{och } \varphi_3(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$$

När vi jämför dessa värden med dem i hörnpunkterna ser vi att minsta värdet är $-9/8$ som antas både i $(0.75, 0.5)$ och $(0.5, 0.75)$ medan det största värdet är 0 och det antas i (0,0).

2. Låt γ_1 vara cirkelbågen $x^2 + y^2 = 1$ moturs från (1,0) till (0,1) och γ_2 linjestycket från (0,1) till (0,2). Som vår integrationsväg väljer vi sedan $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, se figuren.



På γ_1 är $\mathbf{F}(x,y) = (e,1)$ med potentialen $U(x,y) = ex + y$ så vi har

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(0,1) - U(1,0) = 1 - e.$$

På γ_2 är $x = 0$ så vi har $\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{F}(0,y) = (e^{y^2}, \frac{1}{y^2})$ och $dx = 0$ och får därför

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} e^{y^2}\,dx + \frac{1}{y^2}\,dy = \int_1^2 \frac{1}{y^2}\,dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Med den valda kurvan har vi därför

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{3}{2} - e.$$

3. Med $u = 2x^2 - 3y^2\, v = xy$ har vi enligt kedjeregeln

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = 4xz'_u + yz'_v$$
$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = -6yz'_u + xz'_v$$

Detta ger för differentialekvationens vänsterled

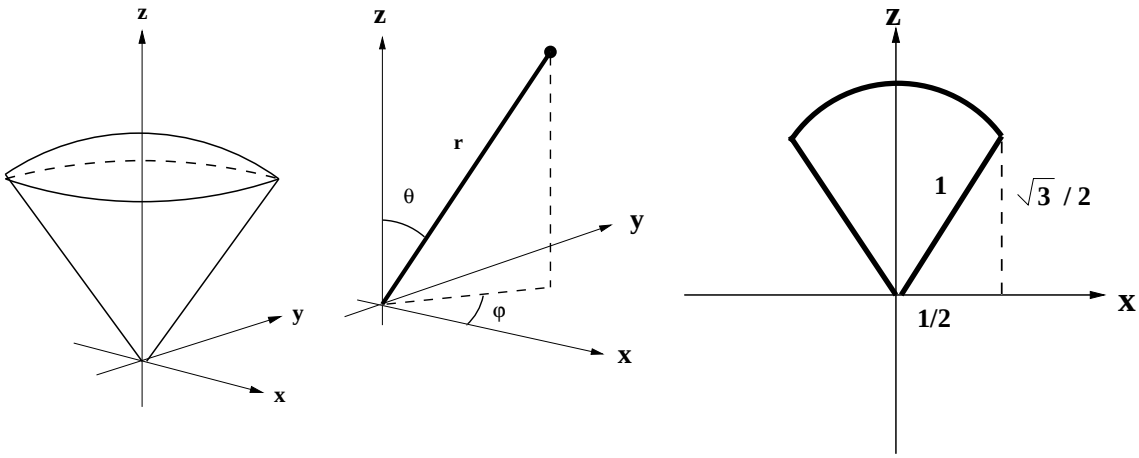
$$3yz'_x + 2xz'_y = 3y(4xz'_u + yz'_v) + 2x(-6yz'_u + xz'_v) = (3y^2 + 2x^2)z'_v$$

Vi har alltså att $3yz'_x + 2xz'_y = 0$ är ekvivalent med att $z'_v = 0$. Detta innebär att lösningen är $z = \varphi(u)$ där φ är en C^1-funktion. Ur detta följer att $z(x,y) = \varphi(2x^2 - 3y^2)$ och alltså speciellt $z(x,0) = \varphi(2x^2)$. För att vi skall ha $z(x,0) = x^4$ skall vi därför ha $\varphi(t) = t^2/4$. Den sökta lösningen är därför

$$z(x,y) = \frac{1}{4}(2x^2 - 3y^2)^2.$$

4. Vi låter K beteckna den givna kroppen (vänstra figuren nedan). Dennas massa M kan då skrivas

$$\iiint_K \rho(x,y,z)\; dx\, dy\, dz$$



I integralen ovan inför vi sfäriska koordinater enligt mittersta figuren, dvs $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, och $z = r\cos\theta$. Denna substitution leder till att $dx\, dy\, dz = r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$ och att kroppen beskrivs av

$$K' :\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{6},\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

För att få fram denna beskrivning av K' har vi använt att $3(x^2+y^2) = 1 - x^2 - y^2$ inträffar då $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ så att snittet med xz-planet ser ut som figuren ovan till höger. Eftersom $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 = r^2\sin^2\theta$ får vi alltså

$$M = \iiint_{K'} r^2\sin^2\theta \cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi/6}\left(\sin^3\theta\int_0^1 r^4\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)dr\right)d\theta = \frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi/6}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$$

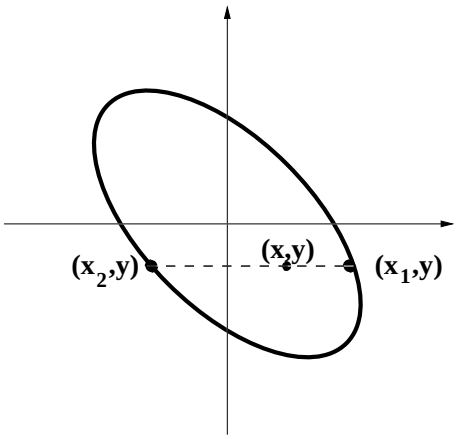
I dennna integral gör vi substitutionen $t = \cos\theta$ med $dt = -\sin\theta d\theta$ och får

$$M = \frac{2\pi}{5}\int_{\sqrt{3}/2}^1 (1-t^2) = \frac{2\pi}{5}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{\sqrt{3}/2}^1 = \frac{\pi}{60}(16 - 9\sqrt{3}).$$

(Detta är inte enda sättet att beräkna integralen för M !)

5. Temperaturen ökar snabbast i gradientens riktning. I varje punkt (x,y) på kurvan är alltså $grad\, T(x,y) = (-0.6x, -0.4y)$ tangentvektor. Skriver vi kurvan på formen $y = y(x)$ har vi därför $y' = \frac{-0.4y}{-0.6x}$ dvs $y' = \frac{2y}{3x}$. Detta är en separabel differentialekvation som vi skriver $\frac{y'}{y} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$ och får $\ln y = \frac{2}{3}\ln x + C_1$, vilket ger $y = Cx^{2/3}$. Här vill vi ha $y(8) = 8$ så eftersom $8^{2/3} = 4$ är $C = 2$. Svaret är alltså $y = 2x^{2/3}$.

6.



För ett givet y har vi $x^2 + +xy + y^2 = 1$ precis då

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2}y \pm \sqrt{\tfrac{y^2}{4} + 1 - y^2} = -\tfrac{1}{2}y \pm \sqrt{1 - \tfrac{3y^2}{4}}$$

Kordans längd är därför

$$x_1 - x_2 = F(x,y) = 2\sqrt{1 - \tfrac{3y^2}{4}} = \sqrt{4 - 3y^2}.$$

Vi kan också ur detta konstatera att de värden på y-koordinaten som förekommer är de som uppfyller $4 - 3y^2 \geq 0$, dvs $-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

För den sökta integralen får vi alltså

$$\iint_E F(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left(\int_{x_2}^{x_1} \sqrt{4-3y^2}\,dy \right) dx = \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} (x_1 - x_2)\sqrt{4-3y^2}\,dy =$$

$$= \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} (4 - 3y^2)\,dy = 2\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} (4-3y^2)\,dy = 2\left[4y - y^3\right]_0^{2/\sqrt{3}} = \frac{32}{3\sqrt{3}}$$