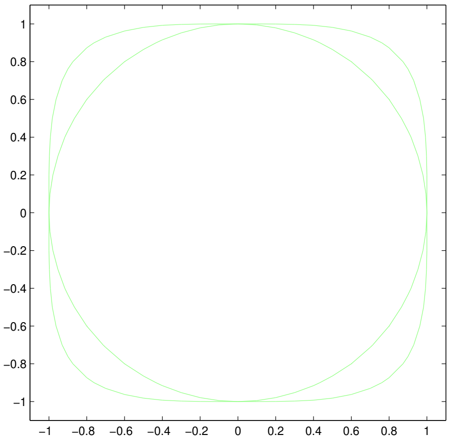
# Lösningar till i Flervariabelanalys för Z1 den 18/8-97

1. Tangentplanet till en yta $z = f(x,y)$ har normalvektorn $(f'_x, f'_y, -1)$. I vårt fall är denna $(2x, 2y, -1)$. Oavsett $c$ har planet $x + 2y + z = c$ normalvektorn $(1,2,1)$. Vi söker en punkt, tangeringspunkten, så att $(2x, 2y, -1)$ är parallell med $(1,2,1)$, dvs $(2x, 2y, -1) = \lambda(1,2,1)$ för något $\lambda$. På grund av tredjekoordinaterna får vi $\lambda = -1$ vilket ger $x = -1/2$ och $y = -1$. I $z = f(x,y)$ ger detta $z = 5/4$. Villkoret på $c$ är därför
$$c = -\frac{1}{2} - 2 + \frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$$
**Svar:** $c = -5/4$

2. Området $D$ kan analytiskt beskrivas $0 \le x - y \le 2$, $0 \le x + y \le 2$. Vi inför nya variabler genom
$$u = x - y, \ \ ,v = x + y$$
I de nya koordinaterna beskrivs området alltså genom
$$E\colon\ 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2$$
Vid koordinatbytet vet vi att
$$du\,dv = \left|\det\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}\right| dx\,dy$$
Eftersom
$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
är $du\,dv = 2\,dx\,dy$ och alltså $dx\,dy = \frac{1}{2}\,du\,dv$. Vi får därför
$$\iint_D \sqrt{x^2 - y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_E \sqrt{u}\sqrt{v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\cdot\int_0^2 \sqrt{u}\,du \ \cdot \int_0^2 \sqrt{v}\,dv$$
Eftersom
$$\int_0^2 \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^2 = \frac{2^{5/2}}{3}$$
är alltså
$$\iint_D \sqrt{x^2 - y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{5/2}}{3}\cdot\frac{2^{5/2}}{3} = \frac{16}{9}$$
**Svar:** $16/9$

3. För funktionen $v = \arctan\frac{y}{x}$ har vi
$$v'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$
och
$$v'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$
Vi söker nu alla $u$ så att $u'_x = v'_y$ och att $u'_y = -v'_x$. Den första av dessa ekvationer ger
$$u'_x = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ som leder till } u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \varphi(y)$$
vilket insatt i den andra ekvationen ger ekvationen
$$\frac{y}{x^2 + y^2} + \varphi'(y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$
som är satisfierad om och endast om $\varphi'(y) = 0$ dvs $\varphi(y) = C$, där $C$ är en godtycklig konstant.
**Svar:** $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + C$ där $C$ en godtycklig konstant.

4. (a) 


Den inre kurvan är $x^2 + y^2 = 1$ medan den yttre är $x^4 + y^4 = 1$.

(b) Kurvan $x^n + y^n = 1$ är sluten och begränsad om $n$ är ett jämnt tal. Då har den kontinuerliga funktionen, $f(x, y) = ax + by$, ett största värde på kurvan. Med $g(x, y) = x^n + y^n$ ger Lagranges sats att detta största värde antas i en punkt där gradienterna för $f(x, y)$ och $g(x, y)$ är parallella. Eftersom

$$\nabla f(x, y) = (a, b) \text{ och } \nabla g(x, y) = n(x^{n-1}, y^{n-1})$$

är minimum i en punkt där $ay^{n-1} = bx^{n-1}$ och alltså

$$y = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/(n-1)} x$$

vilket i ekvationen $x^n + y^n = 1$ ger

$$x^n + \left(\frac{b}{a}\right)^{n/(n-1)} x^n = 1 \text{ dvs } x^n \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{n/(n-1)}\right) = 1$$

Av detta får vi

$$x^n \left(a^{\frac{n}{n-1}} + b^{\frac{n}{n-1}}\right) = a^{\frac{n}{n-1}} \text{ och alltså } x = a^{\frac{1}{n-1}} \left(a^{\frac{n}{n-1}} + b^{\frac{n}{n-1}}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

och för $y$

$$y = b^{\frac{1}{n-1}} \left(a^{\frac{n}{n-1}} + b^{\frac{n}{n-1}}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

Insatt i $ax + by$ ger detta

$$\text{största värdet } = \left(a^{\frac{n}{n-1}} + b^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

(c) Om $n$ är udda är inte längre $x^n + y^n = 1$ begränsad så maximum kan saknas. Till exempel för $n = 3$ har vi på kurvan

$$y^3 = 1 - x^3 \text{ som ger } y = -(x^3 - 1)^{1/3} = -x(1 - x^{-3})^{1/3}$$

Vi har då

$$ax + by = x(a - b(1 - x^{-3})^{1/3}) \approx (a - b)x$$

för stora $|x|$. Största värde saknas då åtminstone om $a \neq b$

5. På linjen $y = 0$ har vi $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = 0$ så om någon av funktionerna har gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$ så är det 0.

(a) På linjen $y = x$ har vi

$$f(x, y) = f(x, x) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

så på denna linje har vi *inte* $f(x, y) \to 0$. Alltså saknar $f$ gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$.

(b) Med polära koordinater $x = r\cos\varphi$ och $y = \sin\varphi$ får vi

$$|g(x, y)| = \frac{r^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi}{r^2} = r^2 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \leq r^2$$

Eftersom $r^2$ är oberoende av $\varphi$ så ger olikheten $g(x, y) \leq r^2$ att $g(x, y) \to 0$ då $(x, y) \to (0, 0)$.

(c) Vi observerar att nämnaren i $h(x,y)$ är 0 då $x+y=0$. Vi försöker visa att gränsvärde saknas genom att välja en kurva som närmar sig linjen $x+y=0$ in mot origo. Vi tar kurvan så att $x^3+y^3=x^6$ det vill säga kurvan

$$y=-x(1-x^3)^{1/3}$$

På denna har vi

$$h(x,y)=\frac{x^4(1-x^3)^{2/3}}{x^3-x^3(1-x^3)}=\frac{x^4(1-x^3)^{2/3}}{x^6}=\frac{1}{x^2}\cdot(1-x^3)^{2/3}\to+\infty$$

då $x\to 0$. Funktionen $h(x,y)$ saknar därför gränsvärde då $(x,y)\to(0,0)$.

6. Låt $Y_1$ vara ytan $x^2+y^2\leq 1$, $z=0$ med nedåtriktad normal. Då är $Y+Y_1$ begränsningsyta till kroppen

$$K:\, x^2+y^2+z^2\leq 1,\, z\geq 0$$

Enligt divergenssatsen har vi

$$I=\iint_{Y+Y_1}\mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iiint_K \operatorname{div}\,\mathbf{u}\,dx\,dy\,dz$$

Här är

$$\operatorname{div}\,\mathbf{u}=\frac{\partial}{\partial x}e^{x^2}+\frac{\partial}{\partial y}(-2xye^{x^2})+\frac{\partial}{\partial z}(e^{x^2+y^2}+z^3)=2xe^{x^2}-2xe^{x^2}+3z^2=3z^2$$

så vi får

$$I=\iiint_K 3z^2\,dx\,dy\,dz$$

Vi beräknar integralen med upprepad integration och får

$$I=\int_0^1 3z^2\left(\iint_{x^2+y^2\leq 1-z^2}1\,dx\,dy\right)\,dz=\int_0^1 3z^2\cdot\pi(1-z^2)\,dz=\frac{2\pi}{5}$$

Vi har alltså

$$\iint_Y\mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS=\frac{2\pi}{5}-\iint_{Y_1}\mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

På $Y_1$ är $\mathbf{N}=(0,0,-1)$ och $\mathbf{u}=(e^{x^2},-2xye^{x^2},e^{x^2+y^2})$ så $\mathbf{u}\cdot\mathbf{N}=-e^{x^2+y^2}$ och alltså

$$\iint_{Y_1}\mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS=-\iint_{x^2+y^2\leq 1}e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

vi inför polära koordinater och får

$$\iint_{Y_1}\mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS=-\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}re^{r^2}\,d\varphi\right)\,dr=-\pi\left[e^{r^2}\right]_0^1=-\pi(e-1)$$

Den sökta integralen är alltså

$$\iint_Y\mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS=\frac{2\pi}{5}+\pi(e-1)=\pi(e-0.6)$$