Lösningar till i Flervariabelanalys för Z1 den 13/1-98

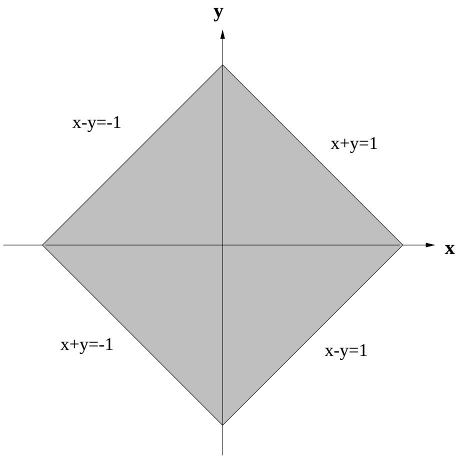
1. Fältet $\mathbf{F} = (P, Q) = (axy + y^3, x^2 + bxy^2)$ är ett potentialfält om och endast om $P'_y = Q'_x$, dvs $ax + 3y^2 = 2x + by^2$, för alla x och y. Detta har vi precis då $a = 2$ och $b = 3$. För dessa värden söker vi en potentialfunktion $U(x, y)$ så att $U'_x = P$ och $U'_y = Q$ dvs

$$U'_x = 2xy + y^3 \qquad (1)$$
$$U'_y = x^2 + 3xy^2 \qquad (2)$$

Ekvation (1) är ekvivalent med att $U = x^2y + xy^3 + h(y)$ där h är en godtycklig deriverbar funktion. Detta leder till att $U'_y = x^2 + 3xy^2 + h'(y)$ så ur (2)får vi $h'(y) = 0$ dvs $h(y) = C$ för någon konstant C. Exempelvis ger $C = 0$ potentialfunktionen $U = x^2y + xy^3$.

Svar: $a = 2$, $b = 3$. en potentialfunktion är $U(x, y) = x^2y + xy^3$.

2.



Analytiskt kan området D beskrivas genom olikheterna

$$-1 \leq x + y \leq 1 \text{ och } -1 \leq x - y \leq 1.$$

Vi gör därför substitutionen $u = x + y$ och $v = x - y$. I uv-planet svarar D mot

$$E : -1 \leq u \leq 1,\ -1 \leq v \leq 1.$$

Dessutom har vi

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \text{ så } du\,dv = 2\,dx\,dy$$

För integralen ger detta

$$\iint_D \frac{\sin^2 \pi(x+y)}{1+(x-y)^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_E \frac{\sin^2 \pi u}{1+v^2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin^2 \pi u\,du \cdot \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+v^2}\,dv$$

Här har vi

$$\int_{-1}^{1} \sin^2 \pi u\,du = 2\int_0^1 \sin^2 \pi u\,du = 2\int_0^1 \frac{1-\cos 2\pi u}{2}\,du = \left[u - \frac{\sin 2\pi u}{2\pi}\right]_0^1 = 1$$

och

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+v^2}\,dv = 2\int_0^1 \frac{1}{1+v^2}\,dv = 2\,[\arctan v]_0^1 = 2 \cdot (\frac{\pi}{4} - 0) = \frac{\pi}{2}$$

Integralens värde är alltså

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

3. Med $u = ax + y$ och $v = ax - y$ ger kedjeregeln för varje funktion $f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = a\frac{\partial f}{\partial u} + a\frac{\partial f}{\partial v}$$

så vi har

$$\frac{\partial}{\partial x} = a\frac{\partial}{\partial u} + a\frac{\partial}{\partial v}$$

På samma sätt får man

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$$

och därmed

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}$$

Detta innebär att

$$z'_x = az'_u + az'_v \text{ och } z'_y = z'_u - z'_v$$

och vidare

$$z''_{xx} = a\frac{\partial}{\partial x}(z'_u) + a\frac{\partial}{\partial x}(z'_v) = a(az''_{uu} + az''_{uv}) + a(az''_{vu} + az''_{vv}) = a^2(z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv})$$

För z''_{yy} får vi på samma sätt

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(z'_u) - \frac{\partial}{\partial y}(z'_v) = z''_{uu} - z''_{uv} - (z''_{vu} - z''_{vv}) = z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}$$

I de nya koordinaterna kan alltså differentialekvationen skrivas

$$(a^2-4)z''_{uu} + 2(a^2+4)z''_{uv} + (a^2-4)z''vv = 1.$$

Vi väljer nu $a = 2$ och får

$$16z''_{uv} = 1 \text{ som efter } z''_{uv} = \frac{1}{16} \text{ ger } z'_u = \frac{v}{16} + g(u)$$

dvs

$$z = \frac{uv}{16} + G(u) + H(v) = \frac{4x^2 - y^2}{16} + G(2x+y) + H(2x-y)$$

där G och H är godtyckliga två gånger deriverbara funktioner av en variabel.

4. Kostnaden är $2x+3y+4z$ kr, så problemet är att maximera $U(x,y,z) = xyz$ då $2x+3y+4z = 180$ och $x,y,z \geq 0$. Eftersom definitionsmängden är kompakt finns ett största värde och det antas i en punkt där $x,y,z > 0$, eftersom uppenbarligen inte $U = 0$ är maximum. Vi kan då använda Lagranges sats och vet att maximum antas i en punkt där gardienterna fär U och $2x+3y+4z$ är parallella. Eftersom gradienten för $2x+3y+4z$ är (2,3,4) antas alltså maximum i en punkt där $\nabla U = \lambda(2,3,4)$ för något tal λ. Detta ger

$$yz = 2\lambda,\ xz = 3\lambda \text{ och } xy = 4\lambda$$

vilket i sin tur ger

$$\frac{yz}{2} = \frac{xz}{3} = \frac{xy}{4}.$$

Efytersom $x,y,z \neq 0$ ger den första likheten att $\frac{y}{2} = \frac{x}{3}$ och den andra att $\frac{z}{3} = \frac{y}{4}$. Vi har därför

$$x = \frac{3y}{2} \text{ och } z = \frac{3y}{4}.$$

Eftersom vi dessutom skall ha $2x+3y+4z = 180$ får vi

$$3y + 3y + 3y = 180$$

och alltså $y = 20$ som i sin tur leder till

Svar: $x = 30$, $y = 20$ och $z = 15$.

5. Med Gauss sats får vi

$$I = \iint_Y (x^3,y^3,z^3)\cdot \mathbf{N}\,dS = \iiint_K div(x^3,y^3,z^3)\,dx\,dy\,dz = \iiint_K 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

där K är klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 4$. Vi inför sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$

varigenom $dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$ och området K beskrivs av $E:\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi$

Detta ger

$$I = 3\iiint_E r^2\cdot r^2 \sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = 3\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 \cdot [-\cos\theta]_0^\pi \cdot 2\pi = \frac{3\pi\cdot 2^7}{5}$$

Svar: Integralen har värdet $384\pi/5$.

6. Taylorpolynomet av ordning 2 i origo till en funktion $f(x,y)$ är

$$p(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2\right]$$

I vårt fall är $f(x,y) = z(x,y)$, där z satisfierar ekvationen

$$e^z + xz - e^y = 0,$$

så vi kan först konstatera att $z(0,0)=0$. Vi deriverar sedan med ekvationen dels med avseende på x dels y och får

$$
\begin{aligned}
e^z \cdot z'_x + z + xz'_x &= 0 && (3)\\
e^z \cdot z'_y + xz'_y - e^y &= 0 && (4)
\end{aligned}
$$

Vi fortsätter sedan med att derivera (3) dels med avseende på x och y och får

$$
\begin{aligned}
e^z \cdot (z'_x)^2 + e^z \cdot z''_{xx} + z'_x + 1 \cdot z'_x + xz''_{xx} &= 0 && (5)\\
e^z \cdot z'_x z'_y + e^z \cdot z''_{xy} + z'_y + +xz''_{xy} &= 0 && (6)
\end{aligned}
$$

Vi deriverar (4) med avseende på y vilket ger

$$
e^z \cdot (z'_y)^2 + e^z \cdot z''_{yy} + z'_x + xz''_{yy} - e^y = 0 \qquad (7)
$$

nu sätter vi in $x=0$, $y=0$ i (3)-(7) och utnyttjar att $x=0$, $y=0$ ger $z=0$

(3) ger $1 \cdot z'_x + 0 + 0 \cdot z'_x = 0$ dvs $z'_x(0,0)=0$
(4) ger $1 \cdot z'_y + 0 \cdot z'_y - 1 = 0$ dvs $z'_y(0,0)=1$
(5) ger då $1 \cdot 0^2 + 1 \cdot z''_{xx} + 0 + 0 + 0 \cdot z''_{xx} = 0$ dvs $z''_{xx}(0,0)=0$
(6) ger $1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot z''_{xy} + 1 + 0 \cdot z''_{xy} = 0$ och alltså $z''_{xy}(0,0)=-1$
(7) ger $1 \cdot 1^2 + 1 \cdot z''_{yy} + 0 \cdot z''_{yy} - 1 = 0$ vilket ger $z''_{yy}(0,0)=0$

Det sökta polynomet är därför

$$
p(x,y) = 0 + 0 \cdot x + 1 \cdot y + \frac{1}{2}\left[0 \cdot x^2 - 2xy + 0 \cdot y^2\right] = y - xy
$$

Svar: $y - xy$