FINANSIELLA DERIVAT OCH STOKASTISK ANALYS
2002/3
(CTH$[TMA285]$ **, GU** $[MAM695]$**)**
INLÄMNINGSUPPGIFT 2
(lämnas in senast 28 november, kl 11.45)

1. (0.3p) Antag $u(t,x) = e^{-\frac{t}{2}} \sinh x$, $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$. Visa att processen $(u(t, W(t)))_{t \geq 0}$ är en Wienermartingal.

2. (0.7p+0.2p) a) Antag $X(t) = \alpha t + \sigma W(t)$, $0 \leq t \leq T$, där $\alpha \in \mathbf{R}$ och $\sigma > 0$. Beräkna
$$E\left[e^{M}\right]$$
då
$$M = \max_{0 \leq t \leq T} X(t).$$
(Ledning: $P\left[\max_{0 \leq u \leq t} X(u) \leq x\right] = \Phi(\frac{x - \alpha t}{\sigma\sqrt{t}}) - e^{\frac{2\alpha x}{\sigma^2}} \Phi(-\frac{x + \alpha t}{\sigma \sqrt{t}}))$

   b) (Bachelier-Samuelsons modell) Antag $S(0) = 100$, $\alpha = 0.1$ och $\sigma = 0.3$ och sätt
$$H = \max_{0 \leq t \leq 1} S(t).$$
Beräkna $E[H]$ och $P[H \geq 120]$.

3. (0.3p) Antag $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett sannolikhetsrum. Om f är en icke-negativ, begränsad och mätbar funktion definierad på R definieras entropin
$$\mathrm{Ent}(f) = \int_R f(x) \ln f(x) d\mu(x) - \int_R f(x) d\mu(x) \ln \int_R f(x) d\mu(x)$$
(här definieras $0 \ln 0 = 0$). Visa att $\mathrm{Ent}(f) \geq 0$ och att
$$\mathrm{Ent}(\alpha f) = \alpha \mathrm{Ent}(f),\ \alpha \geq 0.$$