LÖSNINGAR
FINANSIELLA DERIVAT OCH STOKASTISK ANALYS
(CTH$[TMA285]$, **GU** $[MAM695]$**)**
Skrivningstid och plats: 14 dec 2002, em V *Hjälpmedel:* Beta

---

1. (1.5p+1.5p) a) Lös den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = tX(t)dt + dW(t),\ t \geq 0$$

med begynnelsevillkoret $X(0) = 1$. b) Bestäm processens kovariansfunktion.

Lösning: a) Ekvationen kan skrivas

$$d(e^{-\frac{t^2}{2}}X(t)) = e^{-\frac{t^2}{2}}dW(t),\ t \geq 0$$

och integration ger

$$X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} + e^{\frac{t^2}{2}}\int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}dW(u),\ t \geq 0.$$

b) Det följer att

$$E\left[X(t)\right] = e^{\frac{t^2}{2}}$$

och om $0 \leq s \leq t$ blir

$$\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = e^{\frac{s^2+t^2}{2}}E\left[\int_0^t 1_{[0,s]}(u)e^{-\frac{u^2}{2}}dW(u)\int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}dW(u)\right]$$

$$= e^{\frac{s^2+t^2}{2}}\int_0^s e^{-u^2}du = e^{\frac{s^2+t^2}{2}}\int_0^{\sqrt{2}s} e^{-\frac{v^2}{2}}\frac{dv}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{\pi}e^{\frac{s^2+t^2}{2}}(\Phi(\sqrt{2}s) - 1).$$

För godtyckliga $s, t \geq 0$ följer nu att

$$\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = \sqrt{\pi}e^{\frac{s^2+t^2}{2}}(\Phi(\sqrt{2}\min(s,t)) - 1) \leftarrow SVAR$$

2. (3p) Ett aktiepris uppfyller ekvationen

$$dS(t) = S(t)(\alpha dt + (\beta + \gamma t)dW(t)),\ 0 \leq t \leq T$$

där $\alpha \in \mathbf{R}$ och $\beta, \gamma > 0$ är parametrar. En aktieoption av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet 1 om $S(T) > S(0)$ och i annat fall sker ingen utbetalning. Bestäm optionens värde $v(t)$ vid tiden $t \in [0, T]$. Det förutsätts att räntan $r > 0$ är konstant.

Lösning: Sätt $g(s) = 1_{]S(0),\infty[}(s)$, $s > 0$, och $\sigma(t) = \beta + \gamma t$, $0 \leq t \leq T$. Det är bekant att $v(t) = w(t, S(t))$, där

$$w(t,s) = e^{-r(T-t)} E\left[g(se^{r(T-t)-\frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)du + \int_t^T \sigma(u)dW(u)})\right].$$

Sätt

$$d(t) = \sqrt{\int_t^T \sigma^2(u)du} = \sqrt{\frac{1}{3\gamma}((\beta+\gamma T)^3 - (\beta+\gamma t)^3)}$$

och

$$a(t) = r(T-t) - \frac{d^2(t)}{2}.$$

Härav följer att

$$r(T-t) - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)du + \int_t^T \sigma(u)dW(u) \in N(a(t), d^2(t))$$

och

$$w(t,s) = e^{-r(T-t)} P\left[a(t) - d(t)G > \ln\frac{S(0)}{s}\right]$$

där $G \in N(0,1)$. Alltså är

$$w(t,s) = e^{-r(T-t)}\Phi(\frac{a(t) + \ln\frac{s}{S(0)}}{d(t)})$$

och

$$v(t) = e^{-r(T-t)}\Phi(\frac{a(t) + \ln\frac{S(t)}{S(0)}}{d(t)})$$

där $a(t)$ och $d(t)$ är som ovan$\leftarrow SVAR$

3. (3p) Låt $(U(t))_{t\in\mathbf{R}}$ vara en normaliserad Ornstein-Uhlenbeckprocess dvs $(U(t))_{t\in\mathbf{R}}$ är en reellvärd, centrerad Gaussprocess med kovariansfunktionen
$$E\left[U(s)U(t)\right] = e^{-\frac{1}{2}|s-t|}.$$
Antag $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$. Visa att
$$E\left[(U(t_2)-U(t_1))(U(t_4)-U(t_3))\right] \leq 0.$$
Lösning: Det gäller att
$$A = E\left[(U(t_2)-U(t_1))(U(t_4)-U(t_3))\right]$$
$$= e^{-\frac{1}{2}(t_4-t_2)} - e^{-\frac{1}{2}(t_3-t_2)} - e^{-\frac{1}{2}(t_4-t_1)} + e^{-\frac{1}{2}(t_3-t_1)}.$$
Sätt $x_1 = \frac{1}{2}(t_2-t_1)$, $x_2 = \frac{1}{2}(t_3-t_2)$ och $x_3 = \frac{1}{2}(t_4-t_3)$. Det följer att
$$A = e^{-x_2-x_3} - e^{-x_2} - e^{-x_1-x_2-x_3} + e^{-x_1-x_2}$$
$$= e^{-x_2-x_3}(1-e^{-x_1}) - e^{-x_2}(1-e^{-x_1}) = e^{-x_2}(e^{-x_3}-1)(1-e^{-x_1}) \leq 0$$
eftersom $x_k \geq 0$, $k = 1,2,3$.

4. (3p) (Black-Scholes modell för två aktier och en obligation) Det är givet att $S_1(0) > S_2(0)$. Ett finansiellt derivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet K om $S_1(t) > S_2(t)$ för alla $t \in [0,T]$ och i annat fall sker ingen utbetalning. Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

Lösning: Derivatets värde $v(0)$ vid tiden 0 ges av
$$v(0) = e^{-rT}E^Q\left[K1_{[S_1(t)>S_2(t),\ \text{alla}\ t\in[0,T]]}\right]$$
$$= e^{-rT}KQ\left[S(t) < 1,\ \text{alla}\ t \in [0,T]\right]$$
$$= e^{-rT}KQ\left[\max_{0\leq t\leq T} S(t) < 1\right]$$
där
$$S(t) = \frac{S_2(t)}{S_1(t)} = \frac{S_2(0)}{S_1(0)}e^{(\frac{|\sigma_1|^2}{2}-\frac{|\sigma_2|^2}{2})t+(\sigma_2-\sigma_1)W^\lambda(t)},\ 0 \leq t \leq T.$$
Sätt
$$\alpha = \frac{\mid\sigma_1\mid^2}{2} - \frac{\mid\sigma_2\mid^2}{2}.$$

Då är

$$Q\left[\max_{0\le t\le T}(\alpha t+(\sigma_2-\sigma_1)W^{\lambda}(t))<\ln\frac{S_1(0)}{S_2(0)}\right]$$

$$=P\left[\max_{0\le t\le T}(\alpha t+\delta V(t))<\ln\frac{S_1(0)}{S_2(0)}\right]$$

där $(V(t))_{0\le t\le T}$ är en reellvärd normaliserad Wienerprocess och

$$\delta=\mid\sigma_2-\sigma_1\mid .$$

Om $x>0$ är det givet att

$$P\left[\max_{0\le t\le T}(\alpha t+\delta V(t))<x\right]$$

$$=\Phi(\frac{x-\alpha T}{\delta\sqrt{T}})-e^{\frac{2\alpha x}{\delta^2}}\Phi(-\frac{x+\alpha T}{\delta\sqrt{T}}).$$

Alltså är

$$v(0)=e^{-rT}K\left\{\Phi(\frac{\ln\frac{S_1(0)}{S_2(0)}-\alpha T}{\delta\sqrt{T}})-(\frac{S_1(0)}{S_2(0)})^{\frac{2\alpha}{\delta^2}}\Phi(\frac{\ln\frac{S_2(0)}{S_1(0)}-\alpha T}{\delta\sqrt{T}})\right\}$$

där α och δ är som ovan$\leftarrow SVAR$

5. (3p) Härled Black-Scholes differentialekvation med hjälp av Δ-hedging.

6. (4p) Antag $(W(t))_{0\le t\le T}$ är en reellvärd normaliserad Wienerprocess och n är ett positivt heltal. Sätt $t_k=\frac{kT}{n}$, $k=0,1,...,n$, och

$$L_n^{(2)}=\sum_{k=0}^{n-1}(W(t_{k+1})-W(t_k))^2.$$

Visa att $L_n^{(2)}\to T$ i $L^2(P)$ då $n\to\infty$.

7. (4p) Antag $dX(t)=a(t)dt+b(t)dW(t)$, där $a\in\mathcal{L}^1_{loc}[0,T]$ och $b\in\mathcal{L}^2_{loc}[0,T]$ båda är reellvärda. Utgå från produktregeln för stokastisk differentiering och visa med hjälp av induktion att

$$dX^n(t)=nX^{n-1}(t)dX(t)+\frac{n(n-1)}{2}X^{n-2}(t)b^2(t)dt$$

om n är ett heltal ≥ 2.

FORMLER

Antag $X(t) = \alpha t + \sigma W(t)$, $0 \leq t \leq T$, där $(W(t))_{0 \leq t \leq T}$ är en reellvärd normaliserad Wienerprocess, $\alpha \in \mathbf{R}$ och $\sigma > 0$. Då är

$$P\left[\max_{0 \leq t \leq T} X(t) < x\right] = \Phi(\frac{x - \alpha T}{\sigma\sqrt{T}}) - e^{\frac{2\alpha x}{\sigma^2}}\Phi(-\frac{x + \alpha T}{\sigma\sqrt{T}})$$

för varje $x > 0$.