LÖSNINGAR
FINANSIELLA DERIVAT OCH STOKASTISK ANALYS
(CTH$[TMA285]$, **GU** $[MAM695]$**)**
Skrivningsdag: 25 april 2003 *Hjälpmedel:* Beta

– –

1. (3p) Beräkna väntevärde och varians för den stokastiska variabeln

$$X = \int_0^1 W^2(t)dt.$$

Lösning: Det gäller att

$$E[X] = \int_0^1 E\left[W^2(t)\right]dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2} \leftarrow SVAR$$

För att beräkna variansen av X behöver vi veta att

$$E\left[G^4\right] = 3 \text{ då } G \in N(0,1)$$

vilket direkt följer med hjälp av partiell integration. Nu följer att

$$E\left[X^2\right] = E\left[\int_0^1\int_0^1 W^2(s)W^2(t)dsdt\right]$$

$$= \int_0^1\int_0^1 E\left[W^2(s)W^2(t)\right]dsdt = 2\iint_{0\le s\le t\le 1} E\left[W^2(s)W^2(t)\right]dsdt$$

$$= 2\iint_{0\le s\le t\le 1} E\left[W^2(s)\left\{(W(t)-W(s))^2 + 2(W(t)-W(s))W(s) + W^2(s)\right\}\right]dsdt$$

$$2\iint_{0\le s\le t\le 1}(s(t-s)+0+3s^2)dsdt = 2\iint_{0\le s\le t\le 1}(st+2s^2)dsdt = \frac{7}{24}.$$

Alltså är

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{7}{24} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \leftarrow SVAR$$

2. (3p) Låt (X,Y) vara en centrerad Gaussiskt fördelad vektor i planet. Sätt

$$dQ = \frac{e^{-Y}}{E\left[e^{-Y}\right]}dP.$$

Visa att

$$E^Q[f(X)] = E[f(Z)]$$

där $Z \in N(-\mathrm{Cov}(X,Y), \mathrm{Var}(X))$.

Lösning: Definiera $\sigma = \sqrt{E[X^2]}$. Fallet $\sigma = 0$ är trivialt så låt oss antaga att $\sigma > 0$. Sätt $U = X$ och $V = \alpha X + Y$ där α valts så att U och V är stokastiskt oberoende dvs $\alpha = -\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{E[X^2]}$. Det följer att

$$E^Q[f(X)] = E\left[f(X)e^{-Y}\right]\frac{1}{E[e^{-Y}]}$$

$$= E\left[f(U)e^{-(V-\alpha U)}\right]\frac{1}{E[e^{-(V-\alpha U)}]} = E\left[f(U)e^{\alpha U)}\right]\frac{E\left[e^{-V}\right]}{E[e^{-(V-\alpha U)}]}$$

$$= E\left[f(U)e^{\alpha U)}\right]\frac{1}{E[e^{\alpha U}]} = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{\alpha x}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{1}{e^{\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}}$$

$$= \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{\alpha x}e^{-\frac{(x-\alpha\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = E[f(Z)]$$

där $Z \in N(\alpha\sigma^2, \sigma^2) = N(-\mathrm{Cov}(X,Y), \mathrm{Var}(X))$.

3. (3p) En marknadsmodell består av en obligation och en aktie. Obligationens pris $B(t)$ vid tiden $t \geq 0$ ges av ekvationen $B(t) = B(0)e^{rt}$, där räntan $r > 0$ är konstant. Aktiens prisprocess förutsätts uppfylla ekvationen

$$S(t) = (S(0) - A)e^{\alpha t + \sigma W(t)} + Ae^{rt}, \ t \geq 0$$

där $0 < A < S(0)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$ och $r > 0$ är konstanter. Låt $v(t, S(t))$ beteckna värdet vid tiden $t \in [0, T]$ för en aktieköpoption av europeisk typ med slutdagen T och lösenpriset K. Bestäm $v(t, S(t))$.

Lösning: Sätt

$$\tilde{S}(t) = S(t) - Ae^{rt} = S(t) - \frac{A}{B(0)}B(t), \ t \geq 0$$

så att

$$\tilde{S}(t) = \tilde{S}(0)e^{\alpha t + \sigma W(t)},\ t \geq 0.$$

Notera att $(\tilde{S}(t))_{t\geq 0}$, som är prisprocessen för en portfölj, kan uppfattas som prisprocessen för ett handlat värdepapper vars pris beskriver en geometrisk Brownsk rörelse med volatiliteten σ. Vidare är

$$v(T, S(T)) = \max(0, S(T) - K) = \max(0, \tilde{S}(T) - (K - Ae^{rT})).$$

Om $K - Ae^{rT} \leq 0$ blir

$$\max(0, S(T) - K) = \tilde{S}(T) - (K - Ae^{rT})$$

och

$$\begin{aligned} v(t, S(t)) &= \tilde{S}(t) - (K - Ae^{rT})e^{-r(T-t)} \\ &= S(t) - Ke^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

Om $K - Ae^{rT} > 0$ och $t < T$ blir

$$v(t, S(t)) = c(t, \tilde{S}(t), K - Ae^{rT}; T)$$

$$= \tilde{S}(t)\Phi(\tilde{d}_1) - (K - Ae^{rT})e^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2)$$

$$= (S(t) - Ae^{rt})\Phi(\tilde{d}_1) - (K - Ae^{rT})e^{-r(T-t)}\Phi(\tilde{d}_2)$$

där

$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln \frac{S(t)-Ae^{rt}}{K-Ae^{rT}} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T-t}}{\sigma\sqrt{T-t}} = \tilde{d}_2 + \sigma\sqrt{T-t}.$$

4. (3p) En marknadsmodell består av en obligation och en aktie. Obligationens pris $B(t)$ vid tiden $t \geq 0$ ges av ekvationen $B(t) = B(0)e^{rt}$, där räntan $r > 0$ är konstant. Aktiens prisprocess förutsätts uppfylla ekvationen

$$S(t) = (S(0) - A)e^{\alpha t + \sigma W(t)} + Ae^{\rho t},\ t \geq 0$$

där $0 < A < S(0)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$ och $0 < \rho < r$ är konstanter. Låt $v(t, S(t))$ beteckna värdet vid tiden $t \in [0, T]$ för en aktieköpoption av europeisk typ med slutdagen T och lösenpriset K. Härled en partiell differentialekvation för $v(t, s)$.

Lösning: Notera först att

$$dS(t) = (S(0) - A)e^{\alpha t + \sigma W(t)}\sigma dW(t) + (...)dt$$

$$= \sigma(S(t) - Ae^{\rho t})dW(t) + (...)dt$$

så att

$$(dS(t))^2 = \sigma^2(S(t) - Ae^{\rho t})^2 dt.$$

Betrakta nu en portfölj bestående av en köpoption av aktuellt slag och $-\Delta$ aktier. Portföljens värde $\Pi(t)$ vid tiden t ges av

$$\Pi(t) = v(t, S(t)) - \Delta S(t)$$

och ekvationen

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt$$

ger

$$v'_t(t, S(t))dt + v'_s(t, S(t))dS(t) + \frac{1}{2}v''_{ss}(t, S(t))(dS(t))^2 - \Delta dS(t)$$

$$= r(v(t, S(t)) - \Delta S(t))dt.$$

Alltså är

$$\Delta = v'_s(t, S(t))$$

och vi får

$$v'_t(t, s) + rsv'_s(t, s) + \frac{1}{2}\sigma^2(s - Ae^{\rho t})^2 v''_{ss}(t, s) - rv(t, s) = 0$$

för $s > Ae^{\rho t}$ och $t < T$. Dessutom gäller att

$$v(T, s) = \max(0, s - K).$$

Ekvationen kan alternativt skrivas på följande sätt. Sätt $z = s - Ae^{\rho t}$ och $u(t, z) = v(t, s)$. Då är

$$v'_t = u'_t - \rho Ae^{\rho t}u'_z$$

och vi får att

$$u'_t(t, z) + (rz + (r - \rho)Ae^{\rho t})u'_z(t, z) + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 u''_{zz}(t, s) - ru(t, z) = 0$$

för $z > 0$ och $t < T$. Dessutom gäller att

$$u(T, z) = \max(0, z - (K - Ae^{\rho T})).$$

5. (3p) (1p+2p) Låt h vara en strategi i en ändlig marknadsmodell med vektorprisprocessen

$$S(t) = (S_1(t), ..., S_{n+1}(t)),\ t = 0, ..., T.$$

a) Vad innebär att h är självfinansierande? b) Definiera motsvarande värdeprocess $V_h(t)$, $t = 0, ..., T$, och visa att strategin h är självfinansierande om och endast om

$$\Delta V_h(t) = h(t) \cdot \Delta S(t),\ t = 1, ..., T.$$

6. (4p) Ett lån på beloppet N, som kontrakteras vid tiden 0, löper med marknadsräntan L över perioden från T till U, där $T < U$. Här är L känd fr o m tiden T och ges av ekvationen

$$p(T, U) = \frac{1}{1 + \delta L}$$

där $\delta = U - T$. Låntagaren betalar tillbaka beloppet $N(1 + \delta L)$ vid tiden U. En caplet med capräntan R utbetalar beloppet

$$N\delta \max(L - R, 0)$$

vid tiden U. Visa att denna caplet i tidsintervallet $[0, T]$ och på arbitragefri marknad är ekvivalent med ett lämpligt antal säljoptioner på U-obligationen med slutdagen T.

7. (4p) (Black-Scholes modell) En geometrisk medelvärdesoption utbetalar beloppet

$$Y = \max(0, e^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln S(u) du} - K)$$

slutdagen T. Bestäm optionens pris vid tiden $t < T$.