LÖSNINGAR
FINANSIELLA DERIVAT OCH STOKASTISK ANALYS
(CTH$[TMA285]$, **GU** $[MAM695]$**)**
13 sep 2003 *Hjälpmedel:* Beta

– –

1. (3p) Beräkna $P\left[W(\frac{1}{4}) - W(\frac{1}{2}) + W(1) - 3W(2) > \frac{\sqrt{57}}{2}\right]$.

Lösning: Sätt

$$X = W(\frac{1}{4}) - W(\frac{1}{2}) + W(1) - 3W(2)$$
$$= -3(W(2) - W(1)) - 2W(1) - W(\frac{1}{2}) + W(\frac{1}{4})$$
$$= -3(W(2) - W(1)) - 2(W(1) - W(\frac{1}{2})) - 3W(\frac{1}{2}) + W(\frac{1}{4})$$
$$= -3(W(2) - W(1)) - 2(W(1) - W(\frac{1}{2})) - 3(W(\frac{1}{2}) - W(\frac{1}{4})) - 2W(\frac{1}{4}).$$

Alltså gäller att

$$X \in N(0, 9 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4}) = N(0, \frac{57}{4})$$

och

$$P\left[X > \frac{\sqrt{57}}{2}\right] = 1 - \Phi(1) = \Phi(-1).$$

2. (3p) (Black-Scholes modell) Antag $0 < L < K$. Ett derivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet $Y = \min(L, \mid S(T) - K \mid)$. Beskriv hur derivatet kan hedgas i tidsintervallet $[0, T[$. (Ledning: $\frac{\partial}{\partial s} c(t, s, K) = \Phi(d(t, s, K))$, där $d(t, s, K) = \frac{\ln \frac{s}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$ och $\tau = T - t$.)

Lösning: Det gäller att

$$\min(L, \mid S(T) - K \mid)$$

$$= p(T, S(T), K) - p(T, S(T), K - L) + c(T, S(T), K) - c(T, S(T), K + L)$$

varför

$$\Pi_Y(t) = v(t, S(t))$$

$$= p(t, S(t), K) - p(t, S(t), K - L) + c(t, S(t), K) - c(t, S(t), K + L).$$

Men

$$p(t, S(t), K) = c(t, S(t), K) - S(t) + Ke^{-r\tau}$$

där $\tau = T - t$ så

$$v(t, S(t)) = 2c(t, S(t), K) - c(t, S(t), K - L) - c(t, S(t), K + L) + Le^{-r\tau}.$$

Vi får nu

$$\frac{\partial}{\partial s} v(t, s) = 2\Phi(d(t, s, K)) - \Phi(d(t, s, K - L)) - \Phi(d(t, s, K + L)).$$

Om vi definierar $h_S(t) = v_s'(t, S(t))$ och $h_B(t) = (v(t, S(t)) - h_S(t)S(t))/B(t)$ för alla $t \in [0, T[$ så är

$$v(t, S(t)) = h_S(t)S(t) + h_B(t)B(t)$$

och

$$dv(t, S(t)) = h_S(t)dS(t) + h_B(t)dB(t).$$

3. (3p) Lös den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = (1 + X(t))dt + X(t)dW(t), \ t \geq 0$$

med begynnelsevillkoret $X(0) = 0$. (Ledning: Studera $d(X(t)Y(t))$, där $dY(t) = -Y(t)dW(t)$.)

Lösning: Om $dY(t) = -Y(t)dW(t)$ så

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + dX(t)dY(t)$$

$$= -X(t)Y(t)dW(t) + Y(t)((1 + X(t))dt + Y(t)X(t)dW(t) - X(t)Y(t)dt$$

$$= Y(t)dt$$

och vi får

$$X(t)Y(t) = \int_0^t Y(u)du.$$

Om vi väljer $Y(0) = 1$ blir

$$Y(t) = e^{-\frac{t}{2}-W(t)}$$

och

$$X(t) = e^{\frac{t}{2}+W(t)} \int_0^t e^{-\frac{u}{2}-W(u)}du.$$

4. (3p) Antag $T > 0$, $N \in \mathbf{N}_+$ och $T_k = \frac{k}{N}T$, $k = 0, 1, ..., N$. Ett derivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet $S(T)$ om $S(T_0) \leq S(T_1) \leq ... \leq S(T_N)$ och i annat fall sker ingen utbetalning. Bestäm derivatets pris vid tiden 0.

Lösning: Sätt $g(s_0, s_1, ..., s_N) = s_N$ om $s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_N$ och sätt $g(s_0, s_1, ..., s_n) = 0$ i annat fall. Derivatets pris vid tiden 0 är lika med $v(S(0))$ där

$$\begin{aligned}
v(s) &= e^{-rT}E^Q\left[g(S(T_0), S(T_1), ..., S(T_N))\right] \\
&= e^{-rT}E^Q\left[S(T_N)1_{[S(T_k)\geq S(T_{k-1}),\ k=1,...,N]}\right] \\
&= S(0)e^{-rT}E^Q\left[\prod_{k=1}^{N}\left\{\frac{S(T_k)}{S(T_{k-1})}1_{[S(T_k)\geq S(T_{k-1})]}\right\}\right] \\
&= S(0)e^{-rT}\prod_{k=1}^{N}E^Q\left[\frac{S(T_k)}{S(T_{k-1})}1_{[S(T_k)\geq S(T_{k-1})]}\right] \\
&= S(0)e^{-rT}(E^Q\left[\frac{S(T_1)}{S(T_0)}1_{[S(T_1)\geq S(T_0)]}\right])^N.
\end{aligned}$$

Här är

$$E^Q\left[\frac{S(T_1)}{S(T_0)}1_{[S(T_1)\geq S(T_0)]}\right] = E\left[e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{N}+\sigma W(\frac{T}{N})}1_{\left[(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{N}+\sigma W(\frac{T}{N})\geq 0\right]}\right]$$

$$= \int_{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}x\geq -(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{N}} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{N}+\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}x-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= e^{r\frac{T}{N}} \int_{x \geq -\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\frac{T}{N}}}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}})^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= e^{r\frac{T}{N}} \int_{x \geq -\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\frac{T}{N}}}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{r\frac{T}{N}} \Phi(\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\frac{T}{N}}}{\sigma}).$$

Alltså är

$$v(S(0)) = S(0)\Phi(\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{\frac{T}{N}}}{\sigma})^N.$$

5. (3p) Antag $X \in N(0,1)$ och $a \in \mathbf{R}$. Bestäm ett sannolikhetsmått Q, ekvivalent med P, sådant att $a + X$ har en Gaussisk fördelning med väntevärde 0 och varians 1 relativt Q.

6. (4p) Formulera och bevisa Jensens olikhet för betingade väntevärden.

7. (4p) (Hull-Whites modell) Den korta räntan $r(t)$ löser ekvationen

$$dr(t) = (\Theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t),\ 0 \leq t \leq T$$

där $(W(t))_{0 \leq t \leq T}$ är en normaliserad reellvärd Wienerprocess relativt martingalmåttet Q. Här är a och b är positiva konstanter och $\Theta(t)$ en deterministisk funktion. Bestäm det teoretiska priset vid tiden 0 för en nollkupongsobligation som ger innehavaren beloppet 1 vid tiden T.