MATEMATIK, Chalmers och Göteborgs universitet
Mycket kortfattade lösningsindikationer till tentamen i
Finansiella derivat och stokastisk analys (CTH-TMA285) (GU-MAM695)
13 december 2003.

---

1. (3p) Bestäm alla (om det finns några) reella a, b, c och d så att

$$W^3(t) + (at + b)W^2(t) + (ct + d)W(t)$$

blir en martingal.

◇◇◇

Låt $S(t) = W^3(t) + (at + b)W^2(t) + (ct + d)W(t)$. Välj $\mathcal{F}_t = \sigma(W(u), u \leq t)$. Detta ger direkt att $\mathcal{F}_t$ är en filtration och att $S(t)$ är $\mathcal{F}_t$–mätbar. Vidare har vi eftersom $Z(t)$ är ett polynom av $W(t)$, att $S(t) \in L^1(P)$.

Kvar att visa är att

$$S(t) = E(S(s)|\mathcal{F}_t),\ s \geq t.$$

Vi får

$$E(S(s)|\mathcal{F}_t) = \ldots = W^3(t) + (as + b)W^2(s) + (3(s - t) + cs + d)W(s) + (as + b)(s - t).$$

För att detta ska vara lika med $S(t)$ måste $a = b = 0$ och $c = -3$, men d kan vara ett godtyckligt reellt tal.

---

2. (3p) Lös följande stokastiska differentialekvation för $0 \leq t < T$ där $X(0) = 0$

$$dX(t) = \frac{X(t)}{T - t}\, dt + dW(t).$$

Låt $V(t)$ beteckna variansen av $X(t)$. Bestäm $V(t)$ samt visa att $2V(\frac{s+t}{2}) < V(s) + V(t)$ då $s, t \in (0, T)$.

◇◇◇

Med hjälp av den integrerande faktorn $e^{\ln(T-t)}$ får vi

$$X(t) = \frac{1}{T - t}\int_0^t (T - s)\, dW(s).$$

Variansen $V(t)$ av $X(t)$ blir då

$$V(t) = \frac{1}{(T - t)^2}\mathrm{Var}\left(\int_0^t (T-s)\, dW(s)\right) = \frac{1}{(T - t)^2}\int_0^t (T-s)^2\, dW(s) = \frac{1}{(T - t)^2}(T^3 - (T-t)^3).$$

Vi ska nu visa att $2V(\frac{s+t}{2}) < V(s) + V(t)$. Vi antar att $0 < s < t < T$, eftersom vi ser direkt att om $s = t$ har vi likhet i relationen. [Detta antagande skulle naturligtvis ha gjorts explicit i frågan, vilket frågeställaren beklagar.] Vi ser att olikheten är uppfylld om vi kan visa att $V(t)$ är konvex. Detta ser vi direkt genom att derivera två gånger:

$$V''(t) = \frac{2T^3}{(T - t)^3} > 0.$$

---

3. (3p) Antag att värdet på en aktien är $S(t) = W(t)$ och för en obligation $B(t) \equiv B(0) = 1$. Låt oss använda finanseringsstrategin $(\phi(t), \psi(t)) = (2W(t), -t - W^2(t))$ för en portfölj som vid tiden t innehåller $\phi(t)$ aktier och $\psi(t)$ obligationer. Visa att strategin är självfinansierande.

$\diamond \diamond \diamond$

Låt $V(t)$ vara portföljens värde vid tiden t. Vi noterar att både $\phi(t)$ och $\psi(t)$ är $\mathcal{F}_t$–mätbara. Vi har att portföljen är självförsörjande om

$$dV(t) = \phi(t)\, dS(t) + \psi(t)\, dB(t).$$

Vi får att $V(t) = W^2(t) - t$ vilket ger $dV(t) = 2W(t)\, dW(t) + dt - dt = 2W(t)\, dW(t)$. Högerledet blir $\phi(t)\, dS(t) + \psi(t)\, dB(t) = 2W(t)\, dW(t) + (-t - W^2(t)) \cdot 0 = 2W(t)\, dW(t)$.

---

4. (3p) Ett kontrakt ger köparen R kr vid tiden τ, där

$$\tau = \inf_t [t > 0;\ W(t) \geq 1],$$

där $W(t)$ är en normaliserad Wienerprocess. Vi antar också att vi har konstant ränta r. Vad är det förväntade (med avseende på det "fysikaliska" måttet) värdet av detta kontrakt?

$\diamond \diamond \diamond$

Fysikaliska–måttet. Det förväntade värdet av detta kontrakt är

$$\nu(0) = E[Re^{-r\tau}].$$

Genom att använda den första formeln given på tesens baksidan nedan, får vi efter lite kalkyl att

$$P[\tau > T] = 2\Phi(\frac{x}{\sqrt{T}}) - 1.$$

Genom derivering får vi täthetsfunktionen

$$f(T) = \frac{\partial}{\partial T} P[\tau \leq T] = -2\varphi((\frac{x}{\sqrt{T}})\frac{-\frac{1}{2}x}{T^{3/2}}.$$

Detta ger till slut väntevärdet:

$$E[e^{-r\tau}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{x}{T^{3/2}} e^{-(\frac{1}{\sqrt{T}})^2/2} e^{-rT}\, dt = \ldots = (\text{andra formeln på tesen}) = \ldots = e^{-\sqrt{2r}}.$$

Dvs $\nu(0) = Re^{-\sqrt{2r}}$.

Martingal–måttet. Alternativt, och kanske mer realistiskt, kan vi beräkna värdet av kontraktet som väntevärdet under det ekvivalenta martingalmåttet, Q. Dvs

$$\nu(0) = Re^{-rE^Q[\tau]}.$$

Med hjälp av Cameron–Martin's sats har vi att $dQ = e^{-\lambda T + (\lambda^2 T)/2}\, dP$. Detta ger efter lite arbete att

$$Q(\tau \leq T) = \varphi(\frac{1 + \lambda t}{\sqrt{t}}).$$

Genom att använda formlerna som var givna och resonera analogt med det ovan får vi till slut att:

$$\nu(0) = Re^{-r\frac{e^{-\lambda - |\lambda|}}{|\lambda|}}.$$

Speciellt när vi gör det naturliga antagandet att λ är positiv, så har vi

$$\nu(0) = Re^{-\frac{r}{\lambda} e^{-2\lambda}}.$$

5. (3p) Visa att kurvan $(t, W(t))$, där $0 \le t \le 1$, har oändlig längd.

$\diamond \diamond \diamond$

Se Exempel 3 på sidan 16 i kompendiets kapitel 2.

---

6. (4p) (Vasičeks modell) Antag att den korta räntan, $r(t)$, uppfyller

$$dr(t) = (b - a\,r(t))\,dt + \sigma\,dW(t), \quad 0 \le t \le T,$$

där a och b är positiva konstanter, σ en konstant volatilitet och $(W(t))_{t \ge 0}$ en normaliserad reellvärd Wienerprocess relativt martingalmåttet Q. Bestäm det teoretiska priset vid tiden $t = 0$ för en nollkupongsobligation som ger innehavaren beloppet 1 vid tiden T.

$\diamond \diamond \diamond$

Se Sats 1 på sidan tre i kapitel 6 i kompendiet.

---

7. (4p) (Feynman-Kacs formel) Antag att $u(x, t)$ löser följande paraboliska slutvärdesproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2(t,x)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + b(t,x)u(t,x) = 0, \; 0 \le t < T, \; x \in \mathbb{R} \\ u_{|t=T} = f \end{cases}$$

och antag att $X(t)$ är en lösning den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = a(t, X(t))\,dt + \sigma(t, X(t))\,dW(t), \; 0 \le t \le T.$$

Visa (med hjälp av Itôkalkyl) att under lämpliga regularitetsvillkor (vilka?) gäller följande:

$$u(0, x) = E[f(X(T))e^{\int_0^T b(s,X(s))\,ds}|X(0) = x].$$

$\diamond \diamond \diamond$

Se Exempel 2, sidan 16 i kapitel 7.

FORMLER

- Antag att $X(t) = \alpha t + \sigma W(t), \; 0 \le t \le T$, där $(W(t))_{0 \le t \le}$ är en reellvärd normaliserad Wienerprocess, $\alpha \in \mathbb{R}$ och $\sigma > 0$. Då är

$$P\left[\max_{0 \le t \le T} X(t) < x\right] = \Phi\left(\frac{x - \alpha T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2\alpha x}{\sigma^2}}\Phi\left(-\frac{x + \alpha T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

  för varje $x > 0$.

- Om $a, b > 0$ är

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^{3/2}\,e^{at+b/t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-2\sqrt{ab}}.$$