

1. Förekomsten av absolutbeloppet gör att funktionen inte säkert är deriverbar i $x = 2$. Vi har $f(2) = 1/7$.

Antag nu att $x > 2$. Funktionen är då $f(x) = (2x - 2)/(x^2 + 2x + 6)$, med derivata $f'(x) = -2(x - 4)(x + 2)/(x^2 + 2x + 6)^2$. Vi ser dels att $f(x) \rightarrow 0$, när $x \rightarrow \infty$, och, av derivatan, att $f(x)$ växer mellan 2 och 4 och avtar när $x > 4$. Eftersom $f(4) = 1/5$ ser vi att $f(x)$ har största värdet $1/5$ på intervallet $[2, \infty[$, men samtidigt att den saknar minsta värde där.

Antag sedan att $x < 2$. Funktionen är då $f(x) = 2/(x^2 + 2x + 6)$, med derivata $f'(x) = -2(2x + 2)/(x^2 + 2x + 6)^2$. Vi ser att $f(x) \rightarrow 0$, när $x \rightarrow 0$, och, av derivatan, att $f(x)$ växer fram till -1 , men avtar mellan -1 och 2. Eftersom $f(-1) = 2/5$ och $f(2) = 1/7$ ger detta att f saknar minsta värde på intervallet $] -\infty, 2]$, men har största värdet $2/5$ där.

Svar: Funktionen saknar minsta värde, men har största värdet $2/5$.

2. Enligt derivatans definition ska vi försöka bestämma a och b så att differenskvoten

$$Q = \frac{1}{x-1} \left(\frac{\arctan x - a}{\ln x} - b \right) = \frac{1}{x-1} \left(\frac{\arctan x - a - b \ln x}{\ln x} \right)$$

har ett gränsvärde när $x \rightarrow 1$. Vi ser att nämnaren blir 0 när $x = 1$, så även täljaren måste bli det. Detta ger $a = \arctan 1 = \pi/4$. Vi använder l'Hospitals regel:

$$Q_1 = \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{b}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}}.$$

Eftersom nämnaren är 0 när $x = 1$ måste även täljaren vara det. Detta ger $b = 1/2$. Upprepning av l'Hospitals regel ger sedan

$$Q_2 = \frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}},$$

som har gränsvärdet $(-1/2 + 1/2)/2 = 0$, när $x \rightarrow 1$. l'Hospitals regel säger att även Q har detta gränsvärde.

Svar: $a = \pi/4$, $b = 1/2$ och derivatan blir 0.

3. (a) Man har

$$\begin{aligned} \int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+3t+1}} dt &= \int \frac{t+3/2}{\sqrt{t^2+3t+1}} dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3t+1}} = \\ &= \sqrt{t^2+3t+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{(t+3/2)^2 - 5/4}} = \\ &= \sqrt{t^2+3t+1} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{5}}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{((2t+3)/\sqrt{5})^2 - 1}} = \\ &= \sqrt{t^2+3t+1} - \frac{1}{2} \arcsin((2t+3)/\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Svar: $\sqrt{t^2+3t+1} - \frac{1}{2} \arcsin((2t+3)/\sqrt{5})$

- (b) Variabelsubstitutionen $t = x^2$ ger

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+3x}{x^4+3x^2+2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{t+3}{t^2+3t+2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{t+3}{(t+1)(t+2)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{2dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t+2} \right) = \\ &= \ln \frac{|t+1|}{\sqrt{|t+2|}} = \ln \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2}}. \end{aligned}$$

Svar: $\ln \left((x^2+1)/\sqrt{x^2+2} \right)$.

4. (a) **Svar:** T.ex. $f(x) = |x|$.
 (b) **Svar:** T.ex. $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, när $x \neq 0$, och $f(0) = 0$.
6. Om $f(x) = x^3$ har den sökta tangentlinjen riktningskoefficienten $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$ och går genom $(2, f(2)) = (2, 8)$. Linjen har därför ekvationen $y = 12x - 16$.

Svar: $y = 12x - 16$.

7. Man har

$$\frac{x+2}{x^2+3x+2} = \frac{x+2}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} \rightarrow -1,$$

när $x \rightarrow -2$.

Svar: -1 .

8. Partiell integration ger

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x.$$

Svar: $x \sin x + \cos x$.

9. Eftersom $f(1) = 1$ är $f^{-1}(1) = 1$. Man vet att $Df^{-1}(x) = 1/(Df(f^{-1}(x)))$. Eftersom $Df(x) = 1 + 1/x$ är $Df(f^{-1}(1)) = Df(1) = 1 + 1/1 = 2$. Detta ger $Df^{-1}(1) = 1/2$.

Svar: $1/2$.

10. Variabelsubstitutionen $t = x^2$ ger

$$\int \frac{2x}{x^4+1} \, dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t.$$

Gränserna $x = 0$ och $x = \infty$ motsvarar $t = 0$ och $t = \infty$. Detta ger

$$\int_0^\infty \frac{2x}{x^4+1} \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan(t) - \arctan(0) = \pi/2 - 0 = \pi/2.$$

Svar: $\pi/4$.

11. Eftersom gränsvärdet, oavsett värden på a och b , är av typen "0/0" kan vi använda l'Hospitals regel. En första användning på kvoten Q i uppgiften ger

$$Q_1 = \frac{2e^{2x} - 2 - 2ax}{\cos x - 1}$$

som också är av typen "0/0". En andra användning av regeln ger

$$Q_2 = \frac{4e^{2x} - 2a}{\sin x}.$$

Här går nämnaren mot 0 när $x \rightarrow 0$, alltså måste även täljaren göra det för att gränsvärdet ska finnas. Detta ger $a = 2$. Med detta värde ger Q_2 ett gränsvärde av typen "0/0". Regeln ger nu

$$Q_3 = \frac{8e^{2x}}{\cos x} \rightarrow \frac{8}{1} = 8,$$

när $x \rightarrow 0$. Enligt l'Hospitals regel har även den ursprungliga kvoten Q detta gränsvärde.

Svar: $a = 2$ och gränsvärdet blir 8.