

Lösning av TMA305 Envariabelanalys I, del a, 03 10 21

1. Drivatan i $x = 1$ är gränsvärdet av följande differenskvot, när $x \rightarrow 1$:

$$Q = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{a(x - 1) + \ln x - b(x - 1)^2}{(x - 1)^3},$$

Detta är ett gränsvärde av typ "0/0". Derivering av nämnare och täljare ger

$$Q_1 = \frac{a + (1/x) - 2b(x - 1)}{3(x - 1)^2}.$$

Eftersom nämnaren är noll när $x = 1$, måste även täljaren vara det, om gränsvärdet ska finnas. Detta ger $a = -1$.

Derivering av nämnare och täljare ger

$$Q_2 = \frac{-1/x^2 - 2b}{6(x - 1)}.$$

Eftersom nämnaren är noll när $x = 1$, måste även täljaren vara det, om gränsvärdet ska finnas. Detta ger $b = -1/2$. Derivering av nämnare och täljare ger $Q_3 = (2/x^3)/6$ som har gränsvärdet $1/3$, när $x \rightarrow 1$. L'Hospitals regel ger att även Q har detta gränsvärde, dvs $f'(1) = 1/3$.

Svar: $a = -1$, $b = -1/2$ och $f'(1) = 1/3$.

2. Om $v(t)$ är farten har man

$$v(t)^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{1+4t^2}{(1+t^2)^2}$$

Man ska försöka bestämma t så att värdet av detta är störst respektive minst. Substitutionen $s = t^2$ ($s \geq 0$) ger $f(s) = (1+4s)/(1+s)^2$, med derivata $f'(s) = (2-4s)/(1+s)^3$ som har positivt tecken mellan 0 och $1/2$ och sedan negativt.

Detta ger att f har sitt största värde när $s = 1/2$, dvs när $t = \pm 1/\sqrt{2}$. Eftersom $f(0) = 1$ och $f(x) \rightarrow 0$, när $x \rightarrow \infty$, ger det dessutom att f saknar minsta värde.

Största farten är $v(\pm 1/\sqrt{2}) = \sqrt{f(1/2)} = \sqrt{3/(9/4)} = 2/\sqrt{3}$.

Svar: Partikeln har ingen lägsta fart, men högsta farten är $2/\sqrt{3}$ vid tiderna $t = \pm 1/\sqrt{2}$.

3. (a) Partiell integration (med $-(1/(2t^2) + 1/2)$ som primitiv funktion till $1/t^3$) ger

$$\left[-\left(\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+t^2) \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1+t^2}{2t^2} \frac{2t}{1+t^2} dt$$

Detta ger $-5 \ln(5)/8 + \ln 2 + [\ln t]_1^2 = -5 \ln(5)/8 + 2 \ln 2$.

Svar: $-5 \ln(5)/8 + 2 \ln 2$.

- (b) Vi bestämmer en primitiv funktion genom att först göra substitutionen $t = \tan x$. Man får

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t^2} dt &= \int \frac{1}{\cos x} \frac{1}{1-\tan^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x}{\cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)} dx = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)(1-2\sin^2 x)} dx. \end{aligned}$$

Vi gör nu substitutionen $s = \sin x$ och får

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1-s^2)(1-2s^2)} ds &= \int \left(-\frac{1/2}{1-s} - \frac{1/2}{1+s} + \frac{1}{1-\sqrt{2}s} + \frac{1}{1+\sqrt{2}s} \right) ds = \\ &= \ln \left(\frac{1+\sqrt{2}s}{1-\sqrt{2}s} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+s}{1-s} \right) = F(s). \end{aligned}$$

Gränserna $t = 0$ och $t = 1$ motsvarar $x = 0$ respektive $x = \pi/4$, som i sin tur ger $s = 0$ respektive $s = 1/\sqrt{2}$. Vi ser att $F(s)$ saknar gränsvärde när $s \rightarrow 1/\sqrt{2}^-$, så integralen är divergent.

Svar: Divergent.

4. (a) **Svar:** T.ex. $[0, \infty[$.
 (b) **Svar:** T.ex. $]0, 1[$ där supremum är 1.
 (c) Man har $f'(x) = (1 - x^2)/(1 + x^2)^2$ så f har ett största värde i $x = 1$ och det är $f(1) = 1/2$, som också är supremum till mängden av funktionsvärden.
Svar: $1/2$.

6. Lineariseringen är $f'(1)(x - 1) + f(1)$ som här blir $(2 + 1)(x - 1) + 2 = 3x - 1$. **Svar:** $3x - 1$.

7. Man har

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cos x - \ln x \sin x}{\cos^2 x},$$

som ger $f'(0) = 1/1 = 1$.

Svar: 1.

8. Partiell integration ger

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1) \cos x \, dx &= (x^2 + 1) \sin x - 2 \int x \sin x \, dx = \\ &= (x^2 + 1) \sin x - 2(-x \cos x + \int \cos x \, dx) = (x^2 - 1) \sin x + 2x \cos x. \end{aligned}$$

Svar: $(x^2 - 1) \sin x + 2x \cos x$.

9. Man har

$$f'(x) = \frac{-(1 + x^2) - (1 - x)2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{(x - 1)^2 - 2}{(1 + x^2)^2},$$

som är negativ mellan 0 och $1 + \sqrt{2}$ och sedan positiv. Dett ger att funktionens minsta värde är $f(1 + \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})/2$.

Eftersom $f(0) = 1$ och $f(4) = -3/17$ har vi att största värdet är 1.

Svar: Största värdet är 1, medan det minsat är $(1 - \sqrt{2})/2$.

10. Vi ska undersöka gränsvärdet (när $x \rightarrow 1$) av

$$Q = \frac{a \ln x + x - 1}{1 + \cos(\pi x)},$$

som är ett gränsvärde av typen "0/0". Derivering av nämnare och täljare ger

$$Q_1 = \frac{(a/x) + 1}{-\pi \sin(\pi x)},$$

som är av samma typ om $a = -1$. Ytterligare deriveringar ger

$$Q_2 = \frac{1/x^2}{-\pi^2 \cos(\pi x)}$$

som har gränsvärdet $1/\pi^2$, när $x \rightarrow 1$. L'Hospitals regel ger att även Q har detta gränsvärde.

Svar: $a = -1$ och gränsvärdet blir $1/\pi^2$.

11. Man har

$$F(x) = \int \frac{dx}{1 + (1 + x)^2} = \arctan(1 + x).$$

Eftersom $F(x)$ har gränsvärdet $\pi/2$ när $x \rightarrow \infty$ och $F(0) = \pi/4$ blir integralen konvergent med värdet $\pi/2 - \pi/4$.

Svar: $\pi/4$.