

## Lösning av TMA305 Envariabelanalys I, del a, 04 01 12

1. Derivatan i  $x = 0$  är gränsvärdet av följande differenskvot, när  $x \rightarrow 0$ :

$$Q = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\arctan(x) - xe^x/2 - \ln(1+ax)/2}{x^2e^x - x\ln(1+ax)}.$$

Detta är ett gränsvärde av typ "0/0". Derivering av nämnare och täljare ger

$$Q_1 = \frac{1/(1+x^2) - e^x/2 - xe^x/2 - a/(2(1+ax))}{2xe^x + x^2e^x + \ln(1+ax) + ax/(1+ax)}.$$

Eftersom nämnaren är noll när  $x = 0$ , måste även täljaren vara det, om gränsvärdet ska finnas. Detta ger  $a = 1$ .

Derivering av nämnare och täljare ger

$$Q_2 = \frac{-2x/(1+x^2) - e^x - xe^x/2 + 1/(2(1+x)^2)}{(2+4x+x^2)e^x + 1/(1+x) + 1/(1+x)^2}.$$

Men  $Q_2 \rightarrow -1/8$ , när  $x \rightarrow 0$  och alltså har  $Q$  samma gränsvärde enligt l'Hospitals regel. Detta ger  $f'(0) = -1/8$ .

**Svar:**  $a = 1$  och  $f'(0) = -1/8$ .

2. (a) Partiell integration ger

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{1}{1+x} \arctan x \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)} dt = \\ & = -\pi/8 + \int_0^1 \left( \frac{1/2}{1+x} - \frac{x/2 - 1/2}{1+x^2} \right) dx = \\ & = -\pi/8 + \left[ (1/2) \ln(1+x) - (1/4) \ln(1+x^2) + (1/2) \arctan x \right]_0^1 = \\ & = -\pi/8 + \ln(2)/4 + \pi/8 = \ln(2)/4 \end{aligned}$$

**Svar:**  $\ln(2)/4$ .

- (b) Vi gör substitutionen  $t = \sqrt{x}$ , som ger  $t^2 = x$  och  $2t dt = dx$ . Man får

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} dt &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{2t}{t\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= \left[ 2 \arcsin t \right]_0^1 = \pi \end{aligned}$$

**Svar:** Konvergent med värdet  $\pi$ .

3. Under en månad måste  $r/q$  beställningar göras, till en kostnad av  $a + bq$  kronor per gång. Totala kostnaderna för beställningarna under en månad blir  $ra/q + br$ . Kostnaden för lagerhållningen är under en månad  $kq/2$  kronor.

Den totala kostnaden under en månad är därför  $f(q) = kq/2 + ra/q + br$ .

Derivering ger  $f'(q) = k/2 - ra/q^2 = k(q^2 - 2ra/k)/q^2$  som är negativ när  $0 \leq q < \sqrt{2ra/k}$  och positiv när  $q > \sqrt{2ra/k}$ . Detta ger att  $f$  har ett minimum när  $q = \sqrt{2ra/k}$ .

**Svar:**  $q = \sqrt{2ra/k}$ .

4. (c) i) Man har  $f(1) = f(-1)$ , så  $f$  är inte inverterbar.  
 ii) Man har  $f'(x) = 1/(1+x^2)^{3/2} > 0$  så  $f(x)$  är strängt växande och därför inverterbar.  
 iii) Man har  $f(1) = f(-1)$ , så  $f$  är inte inverterbar.  
 (d) Om  $y = f(x)$  har man  $y^2(1+x^2) = x^2$ , vilket ger

$$x = \pm \sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}}.$$

Från ekvationen  $y = f(x)$  ser man att  $x$  och  $y$  ska ha samma tecken

**Svar:**

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y^2/(1-y^2)} & \text{om } 1 > y \geq 0 \\ -\sqrt{y^2/(1-y^2)} & \text{om } -1 < y \leq 0. \end{cases}$$

6. Man har  $f'(x) = e^{x^2+1} + (x+1)2xe^{x^2+1}$ , så  $f'(0) = e$ .

**Svar:**  $e$ .

7. Man har  $f(2) = 1/5$  och  $f'(x) = (1 - x^2/(1+x^2)^2)$ , så  $f'(2) = -3/25$ . Tangentlinjen har därför ekvationen

**Svar:**  $y = -3(x-2)/25 + 1/5 = -3x/25 + 11/25$ .

8. Man har  $f'(x) = (1+x)e^{-x}(1-x)$ , så  $f' > 0$ , när  $0 \leq x < 1$  och  $f' < 0$ , när  $x > 1$ . Alltså har  $f$  ett största värde  $4/e$ , när  $x = 1$ .

Man har  $f(x) \rightarrow 0$ , när  $x \rightarrow \infty$  och  $f(0) = 1$ , så minsta värde saknas, efter som  $f$  växer fram till  $x = 1$  och sedan avtar.

**Svar:** Största värdet är  $e/4$ , men minsta värde saknas.

9. Substitutionen  $t = \cos x$  ger  $dt = -\sin x dx$  och integralen

$$-\int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+(t/\sqrt{2})^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(t/\sqrt{2}).$$

**Svar:**  $-\arctan(\cos(x)/\sqrt{2})/\sqrt{2}$ .

10. Funktionen  $f$  har ett gränsvärde av typen "0/0" när  $x \rightarrow 0$ . Derivering av täljare och nämnare för sig ger

$$Q_1 = \frac{a \cos(ax) - 2}{(1+2x^2)e^{x^2} - 1}.$$

Eftersom nämnaren är 0 när  $x = 0$ , måste även täljaren vara det för att  $Q_1$  ska ha ett gränsvärde när  $x \rightarrow 0$ . Detta ger  $a = 2$ . Ytterligare derivering ger

$$Q_2 = \frac{-4 \sin(2x)}{(6x+4x^3)e^{x^2}},$$

som har gränsvärde av typen "0/0". Ytterligare derivering ger

$$Q_3 = \frac{-8 \cos(2x)}{(6+24x^2+8x^4)e^x},$$

som går mot  $-4/3$ , när  $x \rightarrow 0$ . Enligt l'Hospitals regel har  $f$  samma gränsvärde.

**Svar:**  $a = 2$  och gränsvärdet är  $-4/3$ .

11. Substitutionen  $x = \sqrt{1-t}$  ger  $x^2 = 1-t$  och  $2x dx = -dt$ . Detta ger integralen

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)2x}{x} dx = 2 \left[ x - x^3/3 \right]_0^1 = 4/3.$$

**Svar:** Konvergent med värdet  $4/3$ .