Lösning av TMA305 Envariabelanalys I, del a, 04 08 16

1. Derivatan i $x = 0$ är gränsvärdet av följande differenskvot, när $x \to 0$:

$$Q = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{\sin x} - 1 - ax}{x^2}.$$

Detta är ett gränsvärde av typ "0/0". Derivering av nämnare och täljare ger

$$Q_1 = \frac{\cos x e^{\sin x} - a}{2x}.$$

Eftersom nämnaren är noll när $x = 0$, måste även täljaren vara det, om gränsvärdet ska finnas. Detta ger $a = 1$.

Derivering av nämnare och täljare ger

$$Q_2 = \frac{-e^{\sin x}\sin x + e^{\sin x}\cos^2 x}{2}.$$

Men $Q_2 \to 1/2$, när $x \to 0$ och alltså har Q samma gränsvärde enligt l'Hospitals regel. Detta ger $f'(0) = 1/2$.

Tangenten ska har formen $y = x/2 + m$ och går genom $(0, a) = (0, 1)$. Alltså ska $m = 1$.

Svar: $a = 1$ och $y = x/2 + 1$.

2. (a) Förkortning med 3 och partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned}\int \frac{18x + 15}{9x^2 + 12x - 12}\,dx &= \int \frac{6x + 5}{3x^2 + 4x - 4}\,dx = \int \frac{6x + 5}{(3x - 2)(x + 2)}\,dx \\ &= \int \Big(\frac{27/8}{3x - 2} + \frac{7/8}{x + 2}\Big)\,dx = \\ &= \frac{9}{8}\ln|3x - 2| + \frac{7}{8}\ln|x + 2|\end{aligned}$$

Svar: $\frac{9}{8}\ln|3x - 2| + \frac{7}{8}\ln|x + 2|$.

(b) Vi gör substitutionen $t = \sqrt{x - 1}$, som ger $t^2 + 1 = x$ och $2t\,dt = dx$. Man får

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}} &= \int \frac{2t}{(t^2 + 1)t}\,dt = \int \frac{2}{t^2 + 1}\,dt = \\ &= 2\arctan t = 2\arctan\sqrt{x - 1}.\end{aligned}$$

Detta ger nu

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}} = \lim_{x \to \infty} 2\arctan\sqrt{x - 1} - 2\arctan 0 = 2\pi/2 - 2 \cdot 0 = \pi.$$

Svar: Konvergent med värdet π.

3. Sätt $f(x) = 4 - (x + 1)^2$. En ekvation för tangenten till kurvan i punkten $(a, f(a))$ ges av $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Den skär x- och y-axeln i $x = a - f(a)/f'(a)$ respektive $y = -af'(a) + f(a)$. Triangeln med hörn i dessa punkter på axlarna och i origo har arean

$$\begin{aligned}A(a) &= \frac{1}{2}\Big|\Big(a - \frac{f(a)}{f'(a)}\Big)(f(a) - af'(a))\Big| = \\ &= \Big| - \frac{(f(a) - af'(a))^2}{2f'(a)}\Big|.\end{aligned}$$

I uppgiften är $f = 4 - (x + 1)^2$, så $f' = -2(x + 1)$, som ger $f - xf' = x^2 + 3$. Vi ska bestämma största och minsta värdet av

$$A(x) = \frac{1}{2}\frac{(x^2 + 3)^2}{2(x + 1)} = \frac{1}{4}\frac{(x^2 + 3)^2}{x + 1},$$

när $0 \leq x \leq 1$. Dessa antas antingen i $x = 0$ eller $x = 1$ eller i en punkt där $A' = 0$ Vi har

$$A(0) = 9/4 \text{ och } A(1) = 16/(4 \cdot 2) = 2$$

samt

$$A'(0) = \frac{1}{4}\frac{2(x^2+3)2x(x+1) - (x^2+3)^2}{(x+1)^2}$$

som är 0 precis när $0 = 2(x^2+3)2x(x+1) - (x^2+3)^2 = (x^2+3)(3x^2+4x-3)$, med lösningarna $x = (-2 \pm \sqrt{13})/3$, där bara $(\sqrt{13}-2)/3$ ligger i intervallet.

Insättning och förenkling ger $A((\sqrt{13}-2)/3) = (4/27)(13\sqrt{13}-35)$. Vi undersöker om detta är < 2:

$$\begin{aligned}
(4/27)(13\sqrt{13}-35) &\overset{?}{<} 2 && \Leftrightarrow \\
52\sqrt{13} &\overset{?}{<} 27 \cdot 2 + 140 = 194 && \Leftrightarrow \\
26^2 13 &\overset{?}{<} 97^2 && \Leftrightarrow \\
8788 &\overset{?}{<} 9409.
\end{aligned}$$

Men detta stämmer.

(Räknedosa ger $(4/27)(13\sqrt{13}-35) \approx 1.758839493$ vilket också ger ett godkänt bevis för att talet är < 2.)

Areans största värde är därmed $9/4$ medan det minsta är $(4/27)(13\sqrt{13}-35)$.

Svar: Största arean är $9/4$ och minsta är $(4/27)(13\sqrt{13}-35)$.

4. (c) **Svar:** T.ex. $f(x) = 3x^2/(x-1)(x-2)$.

6. Man har $f'(x) = \cos x^2 - 2x(x+1)\sin x^2$, så $f'(0) = 1$.

   Svar: 1.

7. Man har $f(1) = 1/3$ och $f'(x) = (1+2x-2x)/(1+2x)^2$, så $f'(1) = 1/9$. Tangentlinjen har därför ekvationen

   Svar: $y = (1/9)(x-1) + 1/3 = x/9 + 2/9$.

8. Man har $f'(x) = (-(1+x)^2 + 2(1+x))e^{-x} = (1+x)(1-x)e^{-x}$, så $f' > 0$, när $0 \leq x < 1$ och $f' < 0$, när $x > 1$. Allstå har f ett största värde $4e^{-1}$, när $x = 1$.

   Man har $f(x) \to 0$, när $x \to \infty$ och $f(0) = 1$, så minsta värde saknas, eftersom f växer fram till $x = 1$ och sedan avtar.

   Svar: Största värdet är $4/e$, men minsta värde saknas.

9. Substitutionen $t = e^x$ ger $dt = e^x\,dx$ och integralen

$$\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+(t/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(t/\sqrt{2}).$$

   Svar: $\arctan(e^x/\sqrt{2})/\sqrt{2}$.

10. Funktionen f har ett gränsvärde av typen "0/0" när $x \to 0$. Derivering av täljare och nämnare för sig ger

$$Q_1 = \frac{ae^{ax} + 2 - 4x}{\cos x - 1}.$$

   Eftersom nämnaren är 0 när $x = 0$, måste även täljaren vara det för att Q_1 ska ha ett gränsvärde när $x \to 0$. Detta ger $a = -2$. Ytterligare derivering ger

$$Q_2 = \frac{4e^{-2x} - 4}{-\sin x},$$

   som har gränsvärde av typen "0/0". Ytterligare derivering ger

$$Q_3 = \frac{-8e^{-2x}}{-\cos x} \to 8,$$

   när $x \to 0$. Enligt l'Hospitals regel har f samma gränsvärde.

   Svar: $a = -2$ och gränsvärdet är 8.

11. Partiell integration ger

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln t}{t^3}\,dt &= -\frac{1}{2t^2}\ln t + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \\ &= -\frac{\ln t}{2t^2} + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\Big) = \\ &= -\frac{\ln t}{2t^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{t^2}.\end{aligned}$$

Detta ger nu

$$\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^3}\,dt = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t^3} + \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{4}.$$

Svar: Konvergent med värdet 1/4.