

MATEMATIK
Chalmers

Hjälpmedel: typgodkänd räknare
Tele: Martin Gillstedt
0740-45 90 22

Skriv namn och personnummer
på varje inlämnat papper och linje
samt inskrivningsår på omslaget

Tentamen i TMA 305 Envariabelanalys I, del A, 03 10 21, kl 8.45-12.45.

1. Bestäm konstanterna a och b , så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a(x-1) + \ln x}{(x-1)^2} & \text{när } x \neq 1 \\ b & \text{när } x = 1 \end{cases}$$

blir deriverbar i $x = 1$. Bestäm också $f'(1)$.

2. En partikels läge i planet vid tiden t ($-\infty < t < \infty$) ges av

$$\begin{cases} x(t) = \arctan t \\ y(t) = \ln(1+t^2). \end{cases}$$

Har partikeln en största eller minsta fart vid någon tidpunkt? Bestäm i så fall dessa.

3. (a) Beräkna

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t^2)}{t^3} dt.$$

4p

- (b) Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t^2} dt$$

är konvergent eller divergent. Beräkna den om den är konvergent. 4p

4. (a) Vad menas med en övre begränsning till en mängd av reella tal? 1p
(b) Vad menas med supremum till en mängd av reella tal? 1p
(c) Ge exempel på en icke-tom mängd av reella tal som saknar supremum. 1p
(d) Ge exempel på en mängd av reella tal som har supremum som inte ingår i mängden. 1p
(e) Finns supremum av värdemängden till funktionen $f(x) = x/(1+x^2)$? Bestäm det i så fall. 2p

5. Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Visa att funktionen

$$\bar{f}(x) = \int_a^x f(t) dt$$

då är deriverbar i $]a, b[$. Bestäm också derivatan.

VÄND!

Förslag till lösningar kommer att finnas på kursens webbsida

<http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tma305a/0304/>

Under kursens gång har det förekommit löpande examination. Den maximala poängen från denna är 18. Om Du vill komplettera Din poäng från detta moment kan Du lösa uppgifter nedan. Inom parentes anges vilka uppgifter som är aktuella för Dig. T.ex. anger (< 12) att uppgiften gäller Dig vars poäng från den löpande examinationen är < 12 . Bara korrekt valda uppgifter kommer att beaktas!

Varje uppgift kan ge tre poäng. Tillsammans med den löpande examinationen kan Du dock högst komma upp i den poäng som anges inom parentes. Det betyder att om Du t.ex. har 11p från tidigare examination och löser uppgift 9 helt korrekt, så kommer Du trots detta bara upp i 12p.

Fullständiga lösningar krävs för poäng!

6. (< 3) Bestäm lineariseringen till funktionen $f(x) = x^2 + x$ i punkten $x = 1$.
7. (< 6) Beräkna $f'(0)$ om $f(x) = \ln x / \cos x$.
8. (< 9) Beräkna $\int (x^2 + 1) \cos x \, dx$.
9. (< 12) Bestäm största och minsta värdet till funktionen

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$$

på intervallet $[0, 4]$.

10. (< 15) Bestäm konstanten a , så att funktionen

$$f(x) = \frac{\ln(x^a) + x - 1}{1 + \cos(\pi x)}$$

har ett gränsvärde när $x \rightarrow 1$. Beräkna också gränsvärdet.

11. (< 18) Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2 + 2x + x^2}$$

är konvergent eller divergent. Bestäm dess värde om den är konvergent.

JAS