

MATEMATIK
Chalmers

Hjälpmedel: typgodkänd räknare
Tele: Georgios Foufas
0702-74 09 02

Skriv namn och personnummer
på varje inlämnat papper och linje
samt inskrivningsår på omslaget

Tentamen i TMA 305 Envariabelanalys I, del A, 04 01 12, kl 14.15-18.15.

1. Visa att man kan bestämma konstanten a , så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(x)}{xe^x + \ln(1+ax)} & \text{när } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{när } x = 0 \end{cases}$$

blir deriverbar i $x = 0$. Bestäm också $f'(0)$.

2. (a) Beräkna

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{(1+x)^2} dx.$$

4p

- (b) Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

är konvergent eller divergent. Beräkna den om den är konvergent. 4p

3. Ett byggvaruhus säljer tretumsspik i en kontinuerlig takt av r kartonger per månad. Man köper in kartonger i partier om q kartonger per tillfälle. För varje leverans betalar man en fast avgift om a kronor och b kronor per kartong. I snitt (under en månad) har man $q/2$ kartonger i lager och varje kartong kostar k kronor per månad att lagerhålla. (Talen r , a , b och k är positiva konstanter.)

Hur ska q väljas för att minimera kostnaderna för spikförsäljningen?

4. (a) Vad menas med att en funktion $f(x)$ är inverterbar? 1p
(b) Om f är inverterbar, hur definieras då f^{-1} . 1p
(c) Vilken, eller vilka, av följande funktioner är inverterbara

$$\text{i) } f(x) = 1 + x^2 \quad \text{ii) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{iii) } f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

(Argument krävs!) 2p

- (d) Bestäm inversen i förekommande fall till funktionerna i c). 2p

5. Formulera och bevisa kedjeregeln.

VÄND!

Förslag till lösningar kommer att finnas på kursens webbsida

<http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tma305a/0304/>

Under kursens gång har det förekommit löpande examination. Den maximala poängen från denna är 18. Om Du vill komplettera Din poäng från detta moment kan Du lösa uppgifter nedan. Inom parentes anges vilka uppgifter som är aktuella för Dig. T.ex. anger (< 12) att uppgiften gäller Dig vars poäng från den löpande examinationen är < 12 . Bara korrekt valda uppgifter kommer att beaktas!

Varje uppgift kan ge tre poäng. Tillsammans med den löpande examinationen kan Du dock högst komma upp i den poäng som anges inom parentes. Det betyder att om Du t.ex. har 11p från tidigare examination och löser uppgift 9 helt korrekt, så kommer Du trots detta bara upp i 12p.

Fullständiga lösningar krävs för poäng!

6. (< 3) Beräkna $f'(0)$, när $f(x) = (x + 1)e^{x^2+1}$.

7. (< 6) Bestäm en ekvation för tangentlinjen till $f(x) = x/(1 + x^2)$, i den punkt på grafen där $x = 2$.

8. (< 9) Bestäm största och minsta värdet till funktionen $f(x) = (1 + x)^2 e^{-x}$ när $x \geq 0$.

9. (< 12) Beräkna

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 2} dx$$

10. (< 15) Bestäm konstanten a , så att funktionen

$$f(x) = \frac{\sin(ax) - 2x}{x(e^{x^2} - 1)}$$

har ett gränsvärde när $x \rightarrow 0$. Beräkna också gränsvärdet.

11. (< 18) Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t}} dt$$

är konvergent eller divergent. Bestäm dess värde om den är konvergent.

JAS