

Observera att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdigrättade den 12:e april. Vill du ha besked om resultatet via epost, så skicka meddelande om det till jea@math.chalmers.se. Lycka till!

1. Ange med motivering storleksordningen mellan dessa funktioner då x är nära 0. (6p)

$$f_1(x) = \cos x, f_2(x) = x^3 \sin x, f_3(x) = \frac{\sin x}{x}, f_4(x) = \sin x^2 - \sin^2 x$$

2. Beräkna

$$\mu = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

och

(6p)

$$\int_0^{\infty} (x - \mu)^2 e^{-x} dx.$$

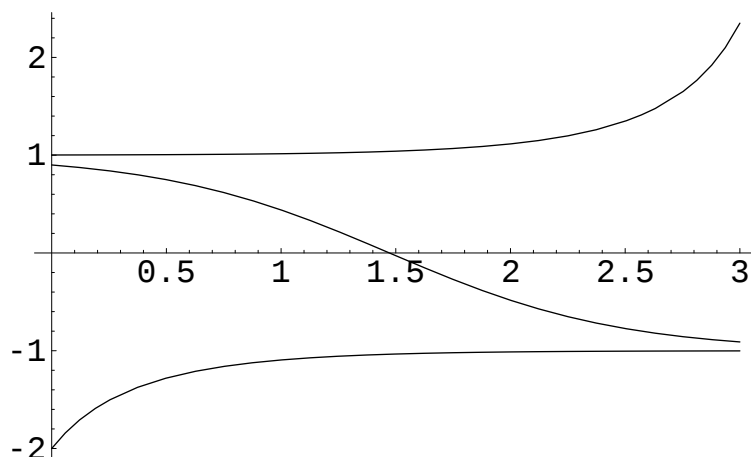
(Dessa typer av integraler dyker upp i samband med statistik.)

3. Låt $f(t)$ vara en funktion sådan att $f(t) = 1$ då $t < \pi$ och $f(t) = 0$ då $t > \pi$. Bestäm den funktion $y(t)$, som har kontinuerlig derivata för alla t och som för $t \neq \pi$ uppfyller

$$y''(t) + y(t) = f(t)$$

och dessutom $y(0) = 0, y'(0) = 0$. Ledning: Man kan börja med att lösa ekvationen på två lämpligt valda intervall. (6p)

4. Följande figur visar graferna för tre funktioner. Försök att hitta på en differentialekvation av första ordningen sådan att funktionerna skulle kunna vara tre lösningar till denna. Du behöver bara ta hänsyn till det principiella uppförandet hos lösningarna. Det finns därför många differentialekvationer som är möjliga, men du behöver alltså bara ange en sådan. Lös därefter din differentialekvation fullständigt. (7p)



VÄND!

5. (a) I kursen har tagits fram en formel för en ändlig summa av (3p)

$$a + ax + ax^2 + \dots + ax^{n-1}.$$

Genomför denna härledning.

- (b) Vi har också undersökt den oändliga serien

$$a + ax + ax^2 + \dots + ax^{n-1} + \dots$$

Undersök för vilka värden på x som serien konvergerar och härled en formel för dess summa. (3p)

- (c) Ge något exempel på varför någon som är extra intresserad av ekonomiska tillämpningar skall vara intresserad av (a) och (b). (1p)

Uppgifter för möjlighet till höjning av tilläggspoängen.

För den som inte har maximal tilläggspoäng från duggan och de två inlämningsuppgifterna, kommer här tre kompletteringsuppgifter. Vilka uppgifter du kan använda för att höja poängen beror på vilken tilläggspoäng du har från början. Förutsättningarna har delats ut i samband med kursen så här anges i samband med varje uppgift bara vilka som kan ha anledning att räkna denna. Fullständiga lösningar skall ges även i dessa uppgifter.

K1 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 6)

När ellipsen $4x^2 + 9y^2 = 36$ roterar runt x -axeln uppkommer en ellipsoid. Bestäm volymen av denna ellipsoid.

K2 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 12)

Antag att en bank på en typ av konton utlovar 5% kontinuerlig ränta. På ett sådant konto sätter du in 10 000 kr som du sedan inte rör.

- (a) Beskriv med hjälp av en differentialekvation dina tillgångar på kontot.
(b) Lös den differentialkvation du fick i (a) med minst två olika metoder.

K3 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 18)

Avgör om följande integraler är konvergenta eller divergenta. Motivera ditt svar.

- (a)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4 + x}} dx.$$

- (b)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^4 + x}} dx.$$

/J-E A