

Observera att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdiggrättade den 29 augusti. Lycka till!

1. Bestäm talet a så att (6p)

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2 + 4x + 3} dx = \ln 2.$$

2. Antag att a är en reell parameter och betrakta differentialekvationen

$$y'' + 2ay' + (a^2 + 1)y = a^2 + 1$$

med begynnelsevärdena $y(0) = y'(0) = 1$.

- (a) Lös differentialekvationen för varje värde på a . (5p)

- (b) Beroende på värdet av a kan man särskilja tre principiellt olika uppföranden av $y(t)$ då $t \rightarrow \infty$. Beskriv dessa tre olika fall. (2p)

3. Gör för var och en av följande begynnelsevärden för differentialekvationer en skiss över hur lösningskurvan ser ut. Du behöver inte ange lösningens analytiska form utan figur räcker men det skall i denna framgå bland annat vad som händer då $t \rightarrow \infty$. I samtliga fall är y en funktion av t .

- (a) $y' = y^2(y - 2)$ med $y(0) = 1$.
- (b) $y' = (y^2 - 1)(3 - y)$ med $y(0) = 0$.
- (c) $y' = (y - 1)^2(3 - y)$ med $y(0) = 0$.
- (d) $y' = (y - 1)^2(3 - y)$ med $y(0) = 2$.
- (e) $y' = y \ln(10/y)$ med $y(0) = 2$.

Det blir en poäng per uppgift och ytterligare en för alla rätt.

4. Ett företag vill bestämma nuvärdet av framtida intäkter av en investering. Man räknar intäkterna i slutet av varje år och räknar med att första intäkten om ett år är 10 miljoner kronor och att de sedan ökar så att de följande årens intäkter är 12, 14, 16, ... osv miljoner kronor. Vad blir då nuvärdet av de framtida intäkterna om man använder sig av räntesatsen 5 %. (6p)

Ledning: Om

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

då $|x| < R$ så gäller för dessa x också

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Använd detta i samband med geometriska serien.

VÄND!

5. Satsen "Second Fundamental Theorem of Calculus" säger att under lämpliga förutsättningar är funktionen F definierad genom

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

en primitiv funktion till f .

- (a) Formulera bokens förutsättningar för satsen. (1p)
- (b) Bevisa satsen. (4p)
- (c) Bevisa att $e^{x^2}/(2x)$ inte är en primitiv funktion till e^{x^2} . (2p)

Uppgifter för möjlighet till höjning av tilläggspoängen.

För den som inte har maximal tilläggspoäng från duggan och de två inlämningsuppgifterna, kommer här tre kompletteringsuppgifter. Om du i samband med tentorna i december eller april lyckades höja din tilläggspoäng så är det denna höjda poäng som är ny utgångspunkt. Vilka uppgifter du kan använda för att höja poängen beror på vilken tilläggspoäng du har från början. Förutsättningarna har delats ut i samband med kursen så här anges i samband med varje uppgift bara vilka som kan ha anledning att räkna denna. Fullständiga lösningar skall ges även i dessa uppgifter. Har du i någon av de två tidigare tentorna på denna kurs lyckats höja din tilläggspoäng, så är det denna höjda summa som är din nuvarande minimipoäng.

- K1 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 6) Området som begränsas av kurvan $f(x) = x(1 - x)$ med $0 \leq x \leq 1$ och x -axeln roterar kring x -axeln. Bestäm volymen av den kropp som uppkommer på detta sätt. (6p)

- K2 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 12) Bestäm den lösning $y = y(t)$ till differentialekvationen

$$(y + 1)y' = t$$

som uppfyller $y(0) = 1$. (6p)

- K3 (Skall bara göras av den vars tilläggspoäng är mindre än 18) Avgör för var och en av följande integraler om den är konvergent eller divergent. (6p)

(a)

$$\int_2^\infty \frac{x - \sin x}{x^2 - \cos x} dx$$

(b)

$$\int_1^\infty \frac{e^{1/x} - 1}{x} dx$$

/J-E A