

Exempel 2 på tenta i Envariabelanalys del B

- Antag att du på en lott har vunnit en vinst som säger att du i slutet av december varje år i all framtid, med början i år, får 300 000 kr. En person som vill bli av med svarta pengar kommer till dig och vill köpa lotten av dig nu. Du har visserligen god moral men samtidigt ett stort behov pengar så du överväger att slå till (på affären alltså!). Vilket är det lägsta pris du skall acceptera om du räknar med en kalkylränta på 10% med kapitalisering en gång om året?
 - Antag att det utlovade beloppet istället ändras med tiden så att du efter n år $200000 + n \cdot 10000$ kr. Vilket pris skall du då acceptera?
 - Hur skall du förklara alla pengar du får för taxeringsmyndigheten?

- Bestäm den lösning $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$y' + 2xy = e^{x-x^2},$$

som uppfyller $y(0) = 3$.

- En snöboll i form av ett klot smälter på ett sådant sätt att den fortsätter vara ett klot men dess volym minskar med en hastighet som är proportionell mot arean. (Har någon sett en snöboll smälta på det sättet??) Antag att snöbollen från början har diametern 4 dm och efter 30 minuter 3dm. Efter hur lång tid har snöbollen smält helt och hållet? Hur blir det om vi i stället antar att *arean* minskar proportionellt mot arean?
- I en formelsamling hittar man att formeln

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

gäller om integralen är konvergent.

- Bevisa att integralen är konvergent om $0 < a < 1$.
- Använd formeln för att för varje positivt heltal n bestämma

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n}} dx$$

- Definiera vad som menas med att en serie $\sum_{k=1}^\infty a_k$ är konvergent.
 - Visa att om serien i (a) är konvergent så gäller

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

- Ge exempel på en serie där $a_k \rightarrow 0$ då $k \rightarrow \infty$ men som ändå är divergent.
- Försök att visa ditt påstående i (c).