

Lösningar till Envariabelanalys I, del B 21/12-2001

1. (a) Vi gör Taylorutveckling av funktionen

$$f(x) = e^x + \sin x + \cos x - 2x$$

och använder standardutvecklingarna

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

För funktion $f(x)$ ger detta efter addition att

$$f(x) = 2 + 2 \cdot \frac{x^4}{4!} + 2 \cdot \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Approximationen blir därför

$$f(x) \approx 2 + \frac{x^4}{12}$$

Svar: $a = 2$, $p = 4$ och $b = 1/12$.

- (b) Eftersom koefficienten framför x^4 är positiv har funktionen ett lokalt minimum i punkten $x = 0$.

2. (a) För en geometrisk serie med kvoten x gäller

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

om $|x| < 1$. Vår serie är summan av två geometriska serier med kvoterna $3/5$ respektive $4/5$. Vi har därför

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} = \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} + \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = 2.5 + 5 = 7.5$$

- (b) Låt

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot x^n.$$

För att använda kvotkriteriet observerar vi att

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot |x| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \cdot |x|.$$

När $n \rightarrow \infty$ får vi därför (division med n^2 i täljare och nämnare)

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(1 + n^{-1})^2}{(2 + 2n^{-1})(2 + n^{-1})} \cdot |x| \rightarrow \frac{|x|}{4}.$$

Kvotkriteriet ger då att serien är konvergent om $|x|/4 < 1$ och divergent om $|x|/4 > 1$ dvs konvergent om $|x| < 4$ och divergent om $|x| > 4$. Konvergensraden är alltså 4.

3. Figur 1: (c), Figur 2: (b), Figur 3: (e) och Figur 4: (f).

4. (a) Rotationskroppen har volymen

$$\int_0^{\infty} \pi(f(x))^2 dx = \pi \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$$

Eftersom vi kan göra partialbråksuppdelningen

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

ser vi att volymen är ändlig om

$$\int_0^b \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = [\ln(x+1) - \ln(x+2)]_0^b = \ln \frac{b+1}{b+2} - \ln \frac{1}{2}$$

har ett ändligt gränsvärde då $b \rightarrow \infty$. Eftersom gränsvärdet är $\ln 1 + \ln 2 = \ln 2$ är det alltså ändligt och den sökta volymen är $\pi \ln 2$.

(b) Det vi har att undersöka är om integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} dx$$

är konvergent. Eftersom

$$0 \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$$

och integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+2} dx$$

är divergent är den ursprungliga integralen också divergent. Arealen är alltså inte ändlig.

Uppgifterna för möjlighet till höjning av tilläggspoängen.

K1 Partiell integration ger

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = 1 - 2e^{-1}.$$

K2 Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 1 = 0$ och har rötterna $r = \pm 1$. Motsvarande homogena lösning är därför

$$y_h(t) = A e^t + B e^{-t}.$$

En partikulärlösning antar vi på formen

$$y = a e^{2t}.$$

Detta leder till att

$$y'' - y = 4a e^{2t} - a e^{2t} = 3a e^{2t}$$

så vi har en lösning om $a = 1/3$.

Ekvationens allmänna lösning är alltså

$$y = A e^t + B e^{-t} + \frac{e^{2t}}{3}.$$

Eftersom detta ger

$$y' = A e^t - B e^{-t} + \frac{2e^{2t}}{3}$$

leder alltså villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ till att $A + B + 1/3 = 0$ och $A - B + 2/3 = 1$. Detta ger $A = 0$ och $B = -1/3$. Alltså blir svaret

$$y = \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3}.$$

K3 Låter vi $y(t)$ vara temperaturen vid tidpunkten t minuter efter införandet i rummet så leder Newtons lag till differentialekvationen

$$y' = k(20 - y)$$

dvs

$$\frac{y'}{20 - y} = k$$

som leder till

$$\int \frac{1}{20 - y} dy = \int k dt.$$

Efter integration får vi $-\ln(20 - y) = kt + C$ dvs

$$y = 20 - e^{-kt-C} = 20 - B e^{-kt}.$$

Här har vi $y(0) = 20 - B$ och eftersom vi skulle ha $y(0) = 0$ är $B = 20$. Då ger villkoret att $y(10) = 10$ att

$$20(1 - e^{-10k}) = 10$$

dvs

$$e^{-10k} = \frac{1}{2}$$

som i sin tur leder till att

$$e^{-20k} = (e^{-10k})^2 = \frac{1}{4}.$$

Alltså gäller

$$y(20) = 20(1 - e^{-20k}) = 20(1 - \frac{1}{4}) = 15.$$