

Lösningar till Envariabelanalys I, del B 4/4-2002

1. Taylorutveckling kring $x = 0$ ger

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\f_2(x) &= x^4 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \dots \\f_3(x) &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\end{aligned}$$

Den fjärde funktionen kräver lite förarbete. I utvecklingen av sinusfunktionen ersätter vi x med x^2 och får

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots$$

För $\sin^2 x$ är det antagligen enklast att utnyttja omskrivningen $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ och utvecklingen av cosinusfunktion vilket ger

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} + \dots \right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + \dots$$

Detta ger i sin tur

$$f_4(x) = \frac{x^4}{3} - \frac{19x^6}{90} + \dots$$

Nu kan vi jämföra de olika funktionerna och se att då x är nära noll har vi

$$f_3(x) \geq f_1(x) > f_2(x) \geq f_4(x)$$

2. Vi beräknar successivt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x} dx &= [-e^{-x}]_0^\infty = -0 + 1 = 1 \\ \int_0^\infty x e^{-x} dx &= [-x e^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx = 0 + 1 = 1 \\ \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx &= [-x^2 e^{-x}]_0^\infty + 2 \int_0^\infty x e^{-x} dx = 0 + 2 \cdot 1 = 2\end{aligned}$$

Detta ger alltså $\mu = 1$ och

$$\int_0^\infty (x - \mu)^2 e^{-x} dx = \int_0^\infty (x^2 - 2x + 1) e^{-x} dx = 2 - 2 + 1 = 1.$$

3. Tillhörande homogena ekvation $y'' + y = 0$ har karakteristisk ekvation $r^2 + 1 = 0$ med rötterna $r = \pm i$. Den homogena ekvationen har alltså lösningen

$$y_h = A \cos t + B \sin t.$$

Differentialekvationen $y'' + y = 1$ har $y = 1$ som en partikulärlösning. Det gör att för $t < \pi$ är den sökta lösningen av formen

$$y = 1 + A \cos t + B \sin t.$$

Eftersom vi skall ha $y(0) = y'(0) = 0$ får vi $A = -1$ och $B = 0$ dvs den sökta lösningen är för $t < \pi$

$$y(t) = 1 - \cos t.$$

För $t > \pi$ kan ekvationen $y'' + y = f(t)$ skrivas $y'' + y = 0$, så där kan lösningen skrivas $y = a \cos t + b \sin t$ för några a och b . Lösningen skall ha kontinuerlig derivata överallt. Enda problematiska punkten är $t = \pi$ där vi skall skarva ihop de två lösningarna. Vi ser att

$$\lim_{t \rightarrow \pi^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pi^-} y(t) = 1 - \cos \pi = 2$$

och

$$\lim_{t \rightarrow \pi^+} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pi^+} a \cos t + b \sin t = -a$$

så funktionen är kontinuerlig i $t = \pi$ om $a = -2$. Med detta a -värde har vi sedan att y :s vänsterderivata i $t = \pi$ är $\sin \pi = 0$ och dess högerderivata $-a \sin \pi + b \cos \pi = -b$. Funktionen är alltså deriverbar i $t = \pi$ precis då $b = 0$. Den har då också kontinuerlig derivata. Svaret är alltså

$$y(t) = \begin{cases} 1 - \cos t, & \text{då } t \leq \pi \\ -2 \cos t, & \text{då } t \geq \pi \end{cases}$$

4. Vi försöker hitta en differentialekvation på formen $y' = f(y)$. Den skall ha egenskapen att $f(y) > 0$ då $y > 1$ eller $y < -1$ medan $f(y) < 0$ då $-1 < y < 1$. En sådan får vi med $f(y) = y^2 - 1$.

Differentialekvationen $y' = y^2 - 1$ är separabel och vi får

$$\int \frac{1}{y^2 - 1} dy = \int 1 dt.$$

Med partialbråksuppdelning får vi

$$\int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy = t + C_1$$

dvs

$$\ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = 2t + 2C_1$$

och alltså

$$\frac{y-1}{y+1} = Ce^{2t}$$

som ger

$$y = \frac{1 + Ce^{2t}}{1 - Ce^{2t}}.$$

Vi får här inte med lösningen $y(t) = -1$ för alla t så den skriver vi till separat.

K1 Volymen V uppfyller

$$V = \int_{-3}^3 \pi y^2 dx = \pi \int_{-3}^3 \left(4 - \frac{4}{9}x^2\right) dx = 8\pi \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{9}x^2\right) dx = 8\pi(3 - 1) = 16\pi$$

K2 Låter vi $y(t)$ vara beloppet vid tidpunkten t får vi differentialekvationen

$$y' = 0.05y.$$

Denna kan exempelvis lösas med hjälp av integrerande faktor så här. Ekvationen skrivs

$$y' - 0.05y = 0.$$

Denna har integrerande faktor $e^{-0.05t}$ så ekvationen kan skrivas

$$\frac{d}{dt}(ye^{-0.05t}) = 0$$

med lösningen

$$ye^{-0.05t} = C$$

och alltså

$$y = Ce^{0.05t}.$$

Villkoret $y(0) = 10000$ ger $y(t) = 10000e^{0.05t}$.

Ett annat sätt att lösa ekvationen är att se den som en separabel ekvation.

$$\frac{y'}{y} = 0.05$$

som ger

$$\ln |y| = 0.05t + C_1$$

dvs $y = Ce^{0.05t}$ med samma fortsättning som i föregående fall.

K3 Båda integralerna är konvergenta. Det följer av uppskattningarna

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x^4 + x}} < \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2} \text{ och } 0 < \frac{1}{\sqrt{x^4 + x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Vi använder den första av dessa uppskattningar på intervallet $x \geq 1$ och eftersom

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \text{ är konvergent}$$

så är också

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4 + x}} dx \text{ konvergent.}$$

Vi använder den andra uppskattningen då $0 < x \leq 1$. Eftersom

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ är konvergent}$$

så är också

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^4 + x}} dx \text{ konvergent.}$$