

Appendix för Envariabelanalys del B på I

J-E A, ht-01

1 Partialbråksuppdelning

I kursboken behandlas på sidan 342 *partialbråksuppdelning* av rationella funktioner. Det som där behandlas kan generaliseras i flera avseenden. Vi behandlar detta i första underavdelningen och ser vart det kan leda ifråga om integraler av rationella funktioner i den andra underavdelningen.

1.1 Tillägg om partialbråksuppdelning

Istället för att göra en allmän beskrivning tittar vi på några exempel.

Exempel 1.1 *Partialbråksuppdelning av den rationella funktionen*

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x}$$

Nämnaren kan faktoriseras $x(x+1)(x-1)$ så i analogi med bokens exempel leds man till ansatsen

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Att denna likhet skall gälla för alla x är ekvivalent med att

$$x^2 + 2x + 3 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

för alla x vilket efter förenkling kan skrivas

$$x^2 + 2x + 3 = (A+B+C)x^2 + (-B+C)x - A.$$

Genom att identifiera koefficienterna på vardera sidan ser vi att detta gäller för alla x om

$$\begin{array}{rcl} x^2 : & A+B+C & = 1 \\ x^1 : & -B+C & = 2 \\ x^0 : & -A & = 3 \end{array}$$

Detta system har lösningen $A = -3$, $B = 1$ och $C = 3$. Vi har alltså uppdelningen

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x(x+1)(x-1)} = -\frac{3}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-1}.$$

Exempel 1.2 *Partialbråksuppdelning av den rationella funktionen*

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x + 3}{x^3 - x}.$$

Den typ av ansats som vi gjorde i föregående exempel förutsätter att täljaren har lägre gradtal än nämnaren. Detta löser vi genom att först utföra en division med rest och få

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x + 3}{x^3 - x} = x + \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x}$$

Nu kan vi göra en partialbråksuppdelning av

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x}.$$

Men det har vi ju redan gjort i föregående exempel, så vi får

$$\frac{x^4 + 2x + 3}{x^3 - x} = x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-1}.$$

Exempel 1.3 *Partialbråksuppdelning av den rationella funktionen*

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + x}$$

Det nya i detta exempel i förhållande till det första är att här går inte nämnaren att faktorisera helt i reella förstegradsynom. Vi har ju

$$x^3 + x = x(x^2 + 1).$$

Den typ av uppdelning man i detta läge kan åstadkomma är

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Som i första exemplet multiplicerar vi med vänstersidans nämnare och ser att uppdelningen fungerar om

$$x^2 + 2x + 3 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$$

dvs om

$$x^2 + 2x + 3 = (A + B)x^2 + Cx + A.$$

Genom identifiering av koefficienter ser vi att detta är ekvivalent med att

$$\begin{array}{rcl} x^2 : & A + B & = 1 \\ x^1 : & C & = 2 \\ x^0 : & A & = 3 \end{array}$$

som ju har lösningen $A = 3$, $B = -2$ och $C = 2$. Vi har alltså uppdelningen

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + x} = \frac{3}{x} - \frac{2x - 2}{x^2 + 1}.$$

Exempel 1.4 *Partialbråksuppdelning av den rationella funktionen*

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^4 + x^2}$$

Nämnaren är i detta fall $x^2(x^2 + 1)$ dvs produkt av två andragradsuttryck. Det skulle då vara naturligt att försöka skriva detta på formen

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^4 + x^2} = \frac{Ax + B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Men vi ser att vi lika gärna kan göra skulle kunna göra ansatsen

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Denna form är mera direkt om man sedan skall gå vidare med exempelvis integration.

Vi multiplicerar med vänsterledets nämnare och får att vi vill ha

$$x^2 + 2x + 3 = Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + x^2(Cx + D)$$

dvs efter förenkling

$$x^2 + 2x + 3 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + Ax + B.$$

Identifiering av koefficienter leder till att vi skall hitta A, B, C, D så att

$$\begin{array}{rcl} x^3 : & A + C & = 0 \\ x^2 : & B + D & = 1 \\ x^1 : & A & = 2 \\ x^0 : & B & = 3 \end{array}$$

vilket inträffar med $A = 2$, $B = 3$, $C = -2$ och $D = -2$. Alltså

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^4 + x^2} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{2x + 2}{x^2 + 1}.$$

Exempel 1.5 *Vilken form av ansats skulle man göra för den rationella funktionen*

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^3(x^2+1)^2}?$$

Metoden från de tidigare exemplen skulle generaliseras till följande typ av ansats

$$\frac{1}{(x+1)^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^3}.$$

Den leder till en del räknande som vi alltså inte genomför.

1.2 Integraler av rationella funktioner

Vi illustrerar genom några exempel på hur man kan bestämma primitiva funktioner till några typer av rationella funktioner som inte behandlas i boken på annat sätt än med hjälp av tabell. För enkelhets skull utelämnar vi i detta avsnitt alla integrationskonstanter eftersom de inte spelar någon roll här.

Först konstaterar vi att

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$$

bland annat leder till att

$$\int \frac{2x + 2b}{x^2 + 2bx + c} dx = \ln |x^2 + 2bx + c|$$

och speciellt att

$$\int \frac{x}{x^2 + c} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + c|$$

vilket vi använder i de följande exemplen. En annan användbar observation är också att i en integral av typen

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

med $a \neq 0$, kan man göra substitutionen $x = ta$ och få

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{1}{a^2 t^2 + a^2} \cdot a dt = \frac{1}{a} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{a} \arctan t = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}.$$

Exempel 1.6 *Bestäm primitiv funktion till*

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 5}$$

Låt

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Vi gör först en kvadratkomplettering och får

$$F(x) = \int \frac{x}{(x+1)^2 + 4} dx.$$

Här gör vi variabelsubstitutionen $t = x + 1$ vilket leder till

$$F(x) = \int \frac{t-1}{t^2+4} dt = \int \frac{t}{t^2+4} dt - \int \frac{1}{t^2+4} dt.$$

Med de båda föregående observationerna ser vi därför att

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln |t^2 + 4| - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 5| - \frac{1}{2} \arctan \frac{(x+1)}{2}$$

Exempel 1.7 *Beräkna integralen*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)} dx.$$

Partialbråksuppdelning av integranden leder till

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = [\ln x - \ln(x+1)]_1^\infty.$$

Här möter man en komplikation när man skall låta $x \rightarrow \infty$ eftersom man får ett uttryck av typen $\infty - \infty$ vilket kan vara vad som helst. Detta undviker man genom att använda logaritmlagarna till omskrivningen

$$\ln x - \ln(x+1) = \ln \frac{x}{x+1}.$$

Detta leder till

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)} dx = \left[\ln \frac{x}{x+1} \right]_1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x}{x+1} - \ln \frac{1}{2} = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2.$$

Exempel 1.8 Beräkna integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{5}{(x+2)(x^2+2x+5)} dx.$$

En partialbråksuppdelning av typen

$$\frac{5}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

leder till

$$\frac{5}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x^2+2x+5}.$$

Den första av dessa har primitiv funktion $\ln|x+2|$ medan den andra får behandlas som ett tidigare exempel, (exempel 1.6). I själva verket är det exakt samma integrand så vi kan här direkt använda den primitiva funktion vi fick fram där. Alltså

$$\int_1^{\infty} \frac{5}{(x+2)(x^2+2x+5)} dx = \left[\ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2} \arctan \frac{(x+1)}{2} \right]_1^{\infty}.$$

Även i detta exempel får vi problem då $x \rightarrow \infty$. Visserligen har vi

$$\arctan \frac{(x+1)}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ då } x \rightarrow \infty$$

men de båda logaritmerna ställer till problem. Detta löser vi på samma sätt som i föregående exempel, dvs genom att slå ihop de båda logaritmerna till en

$$\ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+5| = \frac{1}{2} (2 \ln|x+2| - \ln|x^2+2x+5|) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^2}{x^2+2x+5} \right|.$$

När $x \rightarrow \infty$ har vi

$$\frac{(x+2)^2}{x^2+2x+5} = \frac{(1+x^{-1})^2}{1+2x^{-1}+5x^{-2}} \rightarrow 1$$

och alltså

$$\ln \left| \frac{(x+2)^2}{x^2+2x+5} \right| \rightarrow \ln 1 = 0.$$

Alltså

$$\int_1^{\infty} \frac{5}{(x+2)(x^2+2x+5)} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{x^2+2x+5} + \arctan \frac{(x+1)}{2} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{\pi}{2} - \ln \frac{9}{8} - \arctan 1 \right).$$

Eftersom $\arctan 1 = \pi/4$ får vi

$$\int_1^{\infty} \frac{5}{(x+2)(x^2+2x+5)} dx = \frac{\pi}{8} - \ln \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

1.3 Övningar till avsnitt 1

1. Vilken typ av ansats skall man göra vid en partialbråksuppdelning av

$$\frac{x^3-5}{(x+3)(x-1)^2(x^2+x+1)}?$$

2. Beräkna integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+6} dx.$$

3. Beräkna integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3+5x^2+6x} dx.$$

4. Beräkna integralen

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+3} \right) dx.$$

5. Låt

$$f(x) = \frac{4x+1}{x^3+x^2-2}.$$

(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x)$

(b) Beräkna $\int_2^\infty f(x) dx$.

6. Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{2x}+1} dx$$

7. Beräkna för varje reellt tal $c > -1$ integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+c}.$$

2 Komplexa exponentialfunktionen

2.1 Definitionen

I boken behandlas den komplexa exponentialfunktionen på sidorna 935-937. Där definieras

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

och visas att

$$\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} = ie^{i\theta}.$$

En konsekvens av definitionen är att den polära framställningen av ett komplext tal z kan skrivas (se sid 935)

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

Bara för att vi infört beteckningen $e^{i\theta}$ gäller inte automatiskt samma räkneregler som för den reella exponentialfunktionen. Men lyckligtvis gör de flesta det, vilket vi nu skall bevisa.

Exempelvis har vi

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad (2)$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ då } n \text{ är ett heltal.} \quad (3)$$

För att bevisa dessa regler räcker det egentligen att bevisa den första. De övriga följer sedan enkelt. Enligt definitionen är

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

Vi multiplicerar ihop parenteserna och får att

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1).$$

Men enligt additionsformlerna för sinus- och cosinusfunktionerna leder detta till

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2)) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Nu kan de andra två reglerna bevisas lätt. Nummer (2) genom observationen att vi med hjälp av (1) har

$$e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = e^{i0} = 1$$

och nummer (3) med hjälp av induktion.

Vi kan också göra en allmän definition

Definition 2.1 För ett godtyckligt komplext tal $z = x + iy$ definieras

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}.$$

2.2 Eulers formler och de Moivres formel

Definitionen av $e^{i\theta}$ genom

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

leder till att

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta.$$

Genom addition respektive subtraktion av dessa två likheter får vi

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ respektive } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Dessa två formler brukar kallas **Eulers formler**. De kan ge ett snabbare sätt att handskas med trigonometriska likheter.

Exempel 2.1 Visa att

$$\cos^4 \theta = \frac{\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3}{8}$$

Enligt Eulers formel är

$$\cos^4 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4$$

så genom binomialutveckling får vi

$$\cos^4 \theta = \frac{e^{i4\theta} + 4e^{i2\theta} + 6 + 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}}{16} = \frac{2 \cos 4\theta + 8 \cos 2\theta + 6}{16} = \frac{\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3}{8}.$$

Därmed är alltså likheten bevisad.

Likheten

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

kan då man går tillbaka till definitionen skrivas

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Skriven på denna form brukar likheten kallas **de Moivres formel**.

Exempel 2.2 Skriv $\cos 4x$ som ett polynom i $\cos x$.

Vi vet alltså att $\cos 4x$ är realdelen av $\cos 4x + i \sin 4x$. Med hjälp av de Moivres formel har vi

$$\cos 4x + i \sin 4x = (\cos x + i \sin x)^4.$$

Genom binomialutveckling har vi därför

$$\cos 4x + i \sin 4x = \cos^4 x + 4 \cos^3 x \cdot (i \sin x) + 6 \cos^2 x \cdot (i \sin x)^2 + 4 \cos x \cdot (i \sin x)^3 + (i \sin x)^4$$

dvs

$$\cos 4x + i \sin 4x = \cos^4 x + 4i \cos^3 x \sin x - 6 \cos^2 x \sin^2 x - 4i \cos x \sin^3 x + \sin^4 x.$$

Genom att identifiera realdelarna ser vi

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x.$$

Vi utnyttjar nu trigonometriska ettan och får

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2 = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1.$$

2.3 Derivatans och integralen av e^{ct}

Vi skall här undersöka derivatan av e^{ct} då c är ett komplext tal. Låt $c = a + ib$ (där a och b är reella) och

$$f(t) = e^{ct} = e^{at} \cdot e^{ibt}.$$

Från boken (sid 935) vet vi att

$$\frac{d}{dt} e^{it} = i e^{it}.$$

Med hjälp av kedjeregeln kan vi också få fram att

$$\frac{d}{dt}e^{ibt} = ibe^{ibt} \text{ om } b \text{ är reellt.}$$

Eftersom e^{at} är rent reell kan vi med produktregeln för derivering få

$$\frac{d}{dt}e^{ct} = \frac{d}{dt}e^{at} \cdot e^{ibt} = ae^{at} \cdot e^{ibt} + e^{at} \cdot ibe^{ibt} = (a + ib)e^{at} \cdot e^{ibt} = ce^{ct}.$$

Den vanliga deriveringsregeln för e^{ct} gäller alltså även om c är ett komplext tal. Detta kommer till användning när vi senare undersöker vissa typer av differentialekvationer.

När vi har denna formel för derivering kan vi också dra slutsatsen att

$$\int e^{ct} dt = \frac{e^{ct}}{c}.$$

Här kan högerledet skrivas

$$\frac{e^{ct}}{c} = \frac{e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(a - ib)}{a^2 + b^2}.$$

Eftersom definitionsenligt

$$\int e^{ct} dt = \int e^{at} \cos bt dt + i \int e^{at} \sin bt dt$$

har vi därför

$$\int e^{at} \cos bt dt + i \int e^{at} \sin bt dt = \frac{e^{at}(a \cos bt + b \sin bt)}{a^2 + b^2} + i \frac{e^{at}(a \sin bt - b \cos bt)}{a^2 + b^2}.$$

Genom denna likhet får vi de två formlerna

$$\int e^{at} \cos bt dt = \frac{e^{at}(a \cos bt + b \sin bt)}{a^2 + b^2}$$

respektive

$$\int e^{at} \sin bt dt = \frac{e^{at}(a \sin bt - b \cos bt)}{a^2 + b^2}.$$

Dessa båda formler kan man hitta i bokens tabeller över integraler.

2.4 Övningar till avsnitt 2

1. Visa att

$$(1 - i)^{23} = 2048(1 + i).$$

2. Skriv $\sin^5 x$ som en linjärkombination av $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin 5x$.

3. Visa att de n rötterna till ekvationen $z^n = 1$ är

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right).$$

4. Beräkna integralerna

$$\int_0^\infty e^{-t} \sin t dt$$

och

$$\int_0^\infty e^{-t} \cos t dt.$$

5. Beräkna integralerna

$$\int_0^\infty te^{-t} \sin t dt$$

och

$$\int_0^\infty te^{-t} \cos t dt.$$

6. Bevisa att för alla komplexa tal z_1 och z_2 gäller

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

7. Vad kan man säga om z_1 och z_2 om man vet att

$$e^{z_1} = e^{z_2}?$$

3 Differentialekvationer

3.1 Linjära av första ordningen

En differentialekvation av typen

$$y' + a(t)y = b(t)$$

kallas *linjär av första ordningen*. Specialfallet $a(t) = 0$ är enkel att lösa, eftersom

$$y' = b(t)$$

har lösningen

$$y = \int b(t) dt = B(t) + C$$

där $B(t)$ är en godtycklig primitiv funktion till $b(t)$. Det allmänna fallet angriper man genom att försöka återföra det på specialfallet. Vi startar med ett exempel.

Exempel 3.1 *Lös differentialekvationen*

$$y' + \frac{1}{t}y = 1, \text{ för } t > 0.$$

Genom att multiplicera ekvationen med t ser vi att den är ekvivalent med

$$ty' + y = t.$$

Det vi har vunnit med detta är att vänsterledet nu är en derivata. Vi använder formeln för derivatan av en produkt för att se

$$\frac{d}{dt}(ty) = 1 \cdot y + t \cdot y' = ty' + y.$$

Differentialekvationen kan alltså skrivas

$$\frac{d}{dt}(ty) = t$$

och vi har kommit i samma läge som i specialfallet. Vi får

$$ty = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C$$

och alltså

$$y = \frac{t}{2} + \frac{C}{t},$$

där C är en godtycklig konstant.

I föregående exempel kan man undra hur man skall komma på att det är lämpligt att multiplicera med t . Detta kan systematiseras så här.

Låt $A(t)$ vara en primitiv funktion till $a(t)$. Då gäller

$$\frac{d}{dt}(y \cdot e^{A(t)}) = y' \cdot e^{A(t)} + y \cdot e^{A(t)} A'(t)$$

Eftersom $A'(t) = a(t)$ har vi därför

$$\frac{d}{dt}(y \cdot e^{A(t)}) = e^{A(t)}(y' + a(t)y).$$

Vi multiplicerar därför ekvationen

$$y' + a(t)y = b(t)$$

med $e^{A(t)}$ och konstaterar att den därigenom övergår i

$$\frac{d}{dt}(y \cdot e^{A(t)}) = b(t)e^{A(t)}$$

där vi kan integrera och få

$$y \cdot e^{A(t)} = \int b(t)e^{A(t)} dt.$$

Här bestämmer vi de primitiva funktionerna och löser därefter ut y .

Sammanfattning:

För att lösa en differentialekvation av formen

$$y' + a(t)y = b(t)$$

gör man så här.

1. Bestäm en primitiv funktion $A(t)$ till $a(t)$ och multiplicera differentialekvationen med $e^{A(t)}$. Denna faktor kallas *den integrerande faktorn*.
2. Differentialekvationen övergår i

$$\frac{d}{dt}(y \cdot e^{A(t)}) = b(t)e^{A(t)}.$$

3. Integrera och lös ut y .

Exempel 3.2 *Lös differentialekvationen*

$$(t+1)y' + 2y = (t+1)^3, \text{ för } t > -1.$$

Vi skriver först om ekvationen på formen $y' + a(t)y = b(t)$. Division med $(t+1)$ ger

$$y' + \frac{2}{t+1}y = (t+1)^2.$$

Eftersom

$$\int \frac{2}{t+1} dt = 2 \ln(t+1) + C$$

är en integrerande faktor

$$e^{2 \ln(t+1)} = (t+1)^2$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn får vi

$$\frac{d}{dt}((t+1)^2 y) = (t+1)^{2+2}$$

och alltså

$$(t+1)^2 y = \int (t+1)^4 dt$$

dvs

$$(t+1)^2 y = \frac{(t+1)^5}{5} + C$$

som ger

$$y = \frac{(t+1)^3}{5} + \frac{C}{(t+1)^2}.$$

Exempel 3.3 *Bestäm den funktion $f(t)$ som dels uppfyller*

$$f'(t) + 2tf(t) = t$$

dessutom $f(0) = 1$.

Funktionen satisfierar alltså differentialekvationen

$$y' + 2ty = t.$$

Eftersom en primitiv funktion till $2t$ är t^2 är e^{t^2} en integrerande faktor. Differentialekvationen kan därför skrivas

$$\frac{d}{dt}(ye^{t^2}) = te^{t^2}.$$

Detta ger

$$ye^{t^2} = \int te^{t^2} dt.$$

I denna integral kan vi göra variabelsubstitutionen $u = t^2$, som leder till att $du = 2tdt$, och få

$$\int te^{t^2} dt = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C.$$

När vi går tillbaka till t kan vi alltså se att

$$ye^{t^2} = \int te^{t^2} dt = \frac{1}{2} e^{t^2} + C.$$

Vi löser ut y genom att dividera med e^{t^2} , vilket ju är ekvivalent med att multiplicera med e^{-t^2} . Detta leder till

$$y = \frac{1}{2} + Ce^{-t^2}.$$

För något värde på C är alltså

$$f(t) = \frac{1}{2} + Ce^{-t^2}.$$

Eftersom $f(t)$ dessutom enligt förutsättningarna uppfyller $f(0)$ måste det gälla att

$$\frac{1}{2} + Ce^{-0^2} = 1$$

dvs

$$\frac{1}{2} + C = 1.$$

Eftersom detta ger

$$C = \frac{1}{2}$$

så får vi

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t^2} = \frac{1}{2}(1 + e^{-t^2}).$$

3.2 Linjära differentialekvationer av andra ordningen med konstanta koefficienter

De ekvationer vi skall betrakta är av formen

$$y'' + ay' + by = h(t)$$

där a och b är konstanter, medan $h(t)$ är en given funktion. För att förenkla beteckningarna i fortsättningen betecknar vi ekvationens vänsterled med $L(y)$, dvs för varje två gånger deriverbar funktion y definierar vi

$$L(y) = y'' + ay' + by.$$

Genom att använda deriveringsreglerna för summor och produkter med konstanter får man att L har följande två egenskaper. För alla funktioner y, y_1, y_2 och konstanter c gäller

1. $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$
2. $L(cy) = cL(y)$

Dessa egenskaper hos L gör att den kallas en *linjär operator* och differentialekvationen

$$L(y) = h(t)$$

dvs

$$y'' + ay' + by = h(t)$$

kallas *linjär*. När man försöker lösa denna typ av ekvation spelar specialfallet $L(y) = 0$, dvs

$$y'' + ay' + by = 0,$$

en speciell roll. I fallet $h(t) = 0$ brukar ekvationen kallas *homogen* medan den annars kallas *inhomogen*.

Sats 3.1 Antag att y_0 är en lösning till

$$y'' + ay' + by = h(t).$$

Då är en funktion y också en lösning om och endast om det finns en lösning z till

$$z'' + az' + bz = 0$$

så att

$$y = y_0 + z.$$

Bevis. För godtyckliga funktioner y sätter vi $z = y - y_0$ och observerar att

$$L(z) = L(y) - L(y_0).$$

Eftersom $L(y_0) = h$ enligt förutsättningarna, så har vi i själva verket

$$L(z) = L(y) - h.$$

Av detta följer att

$$L(y) = h \text{ om och endast om } L(z) = 0.$$

Eftersom $y = y_0 + z$ är satsen bevisad.

Strategin för att lösa en differentialekvation

$$y'' + ay' + by = h(t)$$

blir med hjälp av satsen följande.

1. Hitta på något sätt *en* lösning y_0 till ekvationen.
2. Bestäm *alla* lösningar z till motsvarande homogena ekvation

$$z'' + az' + bz = 0.$$

3. Den allmänna lösningen till den givna inhomogena ekvationen är nu $y = y_0 + z$.

Uppläggningsen av fortsättningen är att vi först behandlar de homogena ekvationerna och därefter de inhomogena.

3.3 Homogena ekvationer

Vi börjar med ett recept för att lösa homogena differentialekvationer och tittar efteråt på motiveringar till varför det fungerar.

För att lösa differentialekvationen

$$y'' + ay' + by = 0$$

löser man först den så kallade *karakteristiska ekvationen*

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Detta är alltså en helt vanlig andragrads ekvation så det finns två stycken lösningar r_1 och r_2 . Vi måste nu dela upp i tre olika fall.

Fall 1: r_1, r_2 reella och olika.

I detta fall är lösningen till den homogena differentialekvationen

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

där A och B är godtyckliga konstanter.

Fall 2: r_1, r_2 reella men lika.

I detta fall kan vi sätta $r_1 = r_2 = r$ och lösningen är

$$y = (A + Bt)e^{rt}$$

med A och B är godtyckliga konstanter.

Fall 3: r_1, r_2 komplexa. I detta fall är rötterna av formen $r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta$ med $\beta \neq 0$. Lösningarna till differentialekvationen kan då skrivas

$$y = e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

där A och B är godtyckliga konstanter.

3.3.1 Exempel på användningar av receptet

Exempel 3.4 Lös den homogena differentialekvationen

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Tillhörande karakteristiska ekvation är

$$r^2 - r - 2 = 0 \text{ med rötterna } r_1 = -1, r_2 = 2.$$

Differentialekvationens allmänna lösning är därför

$$y = Ae^{-t} + Be^{2t}.$$

Exempel 3.5 Lös differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Motsvarande karakteristiska ekvation

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

har dubbelroten $r_1 = r_2 = 2$. Differentialekvationen har därför den allmänna lösningen

$$y = (A + Bt)e^{2t}.$$

Exempel 3.6 Lös differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

Ekvationen

$$r^2 - 4r + 13 = 0$$

har rötterna $r_1, r_2 = 2 \pm 3i$. Det innebär att differentialekvationen lösningar är

$$y = e^{2t}(A \cos 3t + B \sin 3t).$$

3.3.2 Exempel för att belysa teorin

Att den karakteristiska ekvationen till

$$y'' + ay' + by = 0$$

kan ha något med lösningar till differentialekvationen att göra, kan man se så här. Vi undersöker för vilka r som funktionen $y = e^{rt}$ löser differentialekvationen. Eftersom $y = e^{rt}$ ger $y' = re^{rt}$ och $y'' = r^2 e^{rt}$, får vi när vi sätter in i differentialekvationen

$$r^2 e^{rt} + a \cdot r e^{rt} + b \cdot e^{rt} = 0$$

dvs

$$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0.$$

Slutsatsen är alltså att e^{rt} är en lösning till differentialekvationen om och endast om

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Att det sedan följer, att om denna ekvation har rötterna r_1 och r_2 , så är även $Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ en lösning till differentialekvationen, följer av att $L(y) = y'' + ay' + b$ är en linjär operator. Men detta hindrar ju inte att det dessutom kan finnas helt andra typer av lösningar. I fallet med dubbelrot gör det ju i själva verket det.

För att se att det inte finns andra typer av lösningar än de i receptet, genomför vi två av exemplen från föregående avsnitt direkt, utan att använda receptet.

Exempel 3.7 *Differentialekvationen $y'' - y' - 2y = 0$.*

En karakteristisk rot kommer vi ihåg är 2 (den andra är -1) och vi inför en ny funktion u genom $y = e^{2t}u$ dvs $u = ye^{-2t}$. Med deriveringsreglerna får vi

$$\begin{aligned}y &= e^{2t} \cdot u \\y' &= 2e^{2t} \cdot u + e^{2t} \cdot u' \\y'' &= 4e^{2t} \cdot u + 4e^{2t} \cdot u' + e^{2t} \cdot u''\end{aligned}$$

Detta leder till att

$$y'' - y' - 2y = (4e^{2t} \cdot u + 4e^{2t} \cdot u' + e^{2t} \cdot u'') - (2e^{2t} \cdot u + e^{2t} \cdot u') - 2e^{2t} \cdot u$$

dvs

$$y'' - y' - 2y = e^{2t}(u'' + 3u').$$

Alltså är differentialekvationen $y'' - y' - 2y = 0$ ekvivalent med att

$$u'' + 3u' = 0.$$

Vid första anblicken ser väl inte detta särskilt mycket bättre ut än det vi hade från början. Men vi kan se att den nya ekvationen bara innehåller u' och u'' inte u . Sätter vi $v = u'$ så är $u'' = v'$ och ekvationen kan skrivas

$$v' + 3v = 0.$$

Denna ekvation vet vi sedan tidigare har lösningen

$$v = Ce^{-3t}.$$

Eftersom $v = u'$ innebär detta för u att vi har

$$u' = Ce^{-3t}.$$

Vi integrerar och ser att

$$u = -\frac{C}{3}e^{-3t} + B,$$

där B är integrationskonstanten. Nu kan vi komma tillbaka till y eftersom $y = e^{2t}u$. Vi multiplicerar alltså med e^{2t} och får

$$y = -\frac{C}{3}e^{-t} + Be^{2t}.$$

Här är alltså B och C godtyckliga konstanter och genom att ersätta $-\frac{C}{3}$ med A har vi lösningen på formen

$$y = Ae^{-t} + Be^{2t}.$$

Exempel 3.8 *Differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = 0$.*

Även här är $r = 2$ en karakteristisk rot och vi gör samma substitution som i föregående exempel dvs $y = e^{2t}u$. Motsvarande räkningar som ovan leder till att

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t}u''$$

så differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = 0$ är ekvivalent med

$$u'' = 0.$$

Härav följer genom upprepad integration att

$$u' = B \text{ och } u = A + Bt$$

där A och B är de integrationskonstanter som uppkommer. När vi går tillbaka till y får vi därför

$$y = (A + Bt)e^{2t}$$

vilket var den lösning vi tidigare angivit enligt receptet.

Den tredje typen av lösning som kan förekomma, den i fallet med komplexa rötter, kan återföras på typ 1 genom att för $r = \alpha + i\beta$ är

$$e^{rt} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t).$$

Genom att den komplexa exponentialfunktionen följer samma regler som den reella får vi även i detta fall att differentialekvationens lösningar kan skrivas

$$y = A_1 e^{r_1 t} + B_1 e^{r_2 t} = e^{\alpha t}((A_1 + B_1) \cos \beta t + i(A_1 - B_1) \sin \beta t).$$

Här kan vi tänka oss att A_1 och B_1 också kan vara komplexa, så att med hjälp av dessa kan få fram vilka reella A och B som helst genom $A_1 + B_1 = A$ och $i(A_1 - B_1) = B$. De reella lösningarna till differentialekvationen är därför

$$y = e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t).$$

3.4 Inhomogena ekvationer

Tidigare konstaterade vi att strategin för att lösa en differentialekvation

$$y'' + ay' + by = h(t)$$

är följande.

1. Hitta på något sätt *en* lösning y_0 till ekvationen.
2. Bestäm *alla* lösningar z till motsvarande homogena ekvation

$$z'' + az' + bz = 0.$$

3. Den allmänna lösningen till den givna inhomogena ekvationen är nu $y = y_0 + z$.

Eftersom vi nu klarar av steg 2, så är det som återstår för att fullständigt lösa en differentialekvation

$$y'' + ay' + by = h(t)$$

att hitta en enda lösning y_0 . En sådan lösning brukar kallas en *partikulärlösning* och kan ibland hittas med en lämplig typ av ansats. Vi ger först några exempel och formulerar sedan några riktlinjer.

Exempel 3.9 Lös differentialekvationen $y'' - y = t$.

Med hjälp av den karakteristiska ekvationen vet vi att motsvarande homogena ekvation

$$z'' - z = 0$$

har lösningen $z = Ae^t + Be^{-t}$. För att hitta en partikulärlösning konstaterar vi att högerledet i

$$y'' - y = t$$

är ett förstgradspolynom och chansar på att det finns en lösning som också är ett förstgradspolynom. Vi ansätter därför

$$y = at + b$$

och försöker bestämma a och b , så att vi får en lösning till differentialekvationen. Med $y = at + b$ får vi $y' = a$ och $y'' = 0$. Vi sätter in i differentialekvationen och ser att vi vill ha

$$0 - (at + b) = t$$

för alla t . Genom att identifiera koefficienterna på båda sidor ser vi att vi får en lösning genom att ta $a = -1$ och $b = 0$. En partikulärlösning y_0 är alltså $y_0(t) = -t$. Detta ger att den fullständiga lösningen till differentialekvationen

$$y'' - y = t$$

är

$$y = y_0 + z = -t + Ae^t + Be^{-t}$$

där A och B är godtyckliga konstanter.

Exempel 3.10 Lös differentialekvationen $y'' - y = e^{2t}$.

Den tillhörande homogena ekvationen är samma som i föregående exempel så dess lösningar kan vi redan. För att hitta en partikulärlösning antar vi $y = ae^{2t}$ och försöker bestämma a så att vi har en lösning. Då är $y' = 2ae^{2t}$ och $y'' = 4ae^{2t}$. Därför vill vi ha en konstant a så att

$$4ae^{2t} - ae^{2t} = e^{2t}$$

dvs

$$3ae^{2t} = e^{2t}.$$

Detta inträffar om $a = \frac{1}{3}$ så en partikulärlösning y_0 är därför

$$y_0 = \frac{e^{2t}}{3}$$

och den allmänna lösningen därmed

$$y = \frac{e^{2t}}{3} + Ae^t + Be^{-t}.$$

Exempel 3.11 Lös differentialekvationen $y'' - y = t + e^{2t}$.

Här utnyttjar vi våra två föregående exempel och det faktum att $L(y) = y'' - y$ är linjär. Med $y_1 = -t$ och $y_2 = \frac{e^{2t}}{3}$ gäller enligt de föregående exemplen

$$L(y_1) = t \text{ och } L(y_2) = e^{2t}.$$

Nu sätter vi $y_0 = y_1 + y_2$ och ser att eftersom L är linjär

$$L(y_0) = L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = t + e^{2t}.$$

Alltså är

$$y_0 = -t + \frac{e^{2t}}{3}$$

en partikulärlösning till ekvationen. Denna har därför den allmänna lösningen

$$y = -t + \frac{e^{2t}}{3} + Ae^t + Be^{-t}.$$

Exempel 3.12 Bestäm en partikulärlösning till $y'' - y = e^t$.

För att försöka hitta en partikulärlösning antar vi $y = ae^t$. Men detta leder till $y'' - y = 0$ så vi kan aldrig få ett a så att $y'' - y = e^t$. Det krävs alltså en annan typ av funktion för att få en partikulärlösning. Ett sätt att försöka förenkla problemet är att införa en ny funktion u genom $y = e^t u$. Detta leder till att $y' = e^t u' + e^t u = e^t(u' + u)$ och $y'' = e^t(u'' + u') + e^t(u' + u) = e^t(u'' + 2u' + u)$. Eftersom detta ger

$$y'' - y = e^t(u'' + 2u')$$

så har vi

$$y'' - y = e^t$$

om

$$u'' + 2u' = 1.$$

Här är högerledet en konstant och vi antar u' som en konstant eftersom det inte finns något u i vänsterledet. Med $u' = a$ får vi $u'' = 0$ och i ekvationen $u'' + 2u' = 1$ får vi

$$0 + 2a = 1$$

dvs

$$a = \frac{1}{2}.$$

Vi vill alltså ha en funktion u så att $u' = \frac{1}{2}$. Det får vi genom att ta $u = \frac{t}{2}$. En partikulärlösning till den ursprungliga differentialekvationen är därför

$$y_0 = \frac{t}{2} \cdot e^t$$

Exempel 3.13 Bestäm en partikulärlösning till

$$y'' - y' - 2y = \sin t.$$

Derivator av $\sin t$ och $\cos t$ ger upphov till nya uttryck i $\sin t$ och $\cos t$. Man kan därför hoppas på att en ansats av typen

$$y = a \sin t + b \cos t$$

skall kunna ge oss en partikulärlösning. Denna ansats leder till

$$\begin{aligned} y &= a \sin t + b \cos t \\ y' &= a \cos t - b \sin t \\ y'' &= -a \sin t - b \cos t \end{aligned}$$

vilket innebär att

$$y'' - y' - 2y = (-3a + b) \sin t + (-3b - a) \cos t.$$

Vi har därför en lösning till

$$y'' - y - 2y = \sin t$$

om

$$\begin{aligned} -3a + b &= 1 \\ -a - 3b &= 0 \end{aligned}$$

Detta system har lösningen $a = -\frac{3}{10}$ och $b = \frac{1}{10}$, så en partikulärlösning till differentialekvationen är

$$y = -\frac{3}{10} \sin t + \frac{1}{10} \cos t.$$

Av exemplen kan vi dra följande slutsatser om hur man kan försöka hitta partikulärlösningar.

$h(t)$ polynom	ansätt y polynom av samma grad.
$h(t) = ce^{kt}$	ansätt $y = ae^{kt}$
$h(t) = c \sin kt + d \cos kt$	ansätt $h(t) = a \sin kt + b \cos kt$

Dessutom såg vi att man kan bli av med en faktor e^{kt} i högerledet, genom att införa en ny funktion u genom $y = e^{kt}u$.

3.5 Uppgifter

1. Lös följande differentialekvationer.

(a) $ty' + y = t^2$

(b) $ty' + 3y = t^2$

(c) $ty' - y = t^2$

(d) $(t^2 + 4)y' + 4ty = t$

2. Bestäm en funktion $f(x)$ så att

$$f'(x) + 2xf(x) = xe^{-x^2}$$

och $f(0) = 1$.

3. Lös följande differentialekvationer.

(a) $yy' = 1$ med $y(0) = 1$.

(b) $yy' = t$ med $y(0) = 1$.

(c) $y' = y^2$ med $y(0) = 1$.

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$ty' + y^2 = 1$$

som uppfyller

(a) $y(1) = 0$

(b) $y(1) = 1$

(c) $y(1) = -1$

5. Lös differentialekvationerna

- (a) $ty' = y$
- (b) $(2t + 1)y' = 3y$
- (c) $y' = e^{y-t}$
- (d) $y' = \frac{y+t}{2}$
- (e) $y' + e^t = e^{t-y}$

6. P är en godtycklig punkt på en kurva, N är skärningspunkten mellan x -axeln och kurvans normal i P , och O är origo. Bestäm kurvan om man vet att den går genom punkten $(1,2)$ och att hela tiden sträckan OP är lika lång som PN .

7. Lös följande differentialekvationer

- (a) $y'' - 3y' + 2y = 0$
- (b) $y'' + 4y' + 4y = 0$
- (c) $2y'' - 2y' + y = 0$
- (d) $3y'' - 2y' = 0$

8. Bestäm den eller de funktioner som uppfyller

- (a) $y'' - 8y' - 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
- (b) $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
- (c) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

9. För vilka värden på talet k finns det andra lösningar till problemet

$$y'' + k^2y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

än den där $y(t) = 0$ för alla t ? Bestäm i dessa fall även lösningarna.

10. Lös följande differentialekvationer.

- (a) $y'' - 4y' + 4y = 2t + 8$
- (b) $0.5y'' + y = t^2 - 7t + 10$
- (c) $y'' - 7y' + 10y = t^3$
- (d) $y'' + y = e^t$
- (e) $y'' + y = \sin 2t$
- (f) $y'' - 2y' + y = te^t$
- (g) $y'' + y = e^{-t} \sin 2t$

11. Lös följande så kallade begynnelsevärdesproblem

$$y'' - y = e^t, \quad y(0) = 2 \text{ och } y'(0) = \frac{1}{2}.$$

4 Svar till uppgifterna.

Avsnitt 1

1. $\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$
2. $\ln \frac{3}{2}$
3. $\frac{1}{6} \ln \frac{27}{16}$
4. $\ln 2 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$
5. (a) $2 \arctan |1+x| + \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 2x + 2)$ (b) $\pi - 2 \arctan 3 + \frac{1}{2} \ln 10$
6. $\frac{1}{2} \ln 2$
- 7.

$$\begin{aligned} \text{Om } c > 0: & \quad \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{c}} \right) \\ \text{Om } c > 0: & \quad 1 \\ \text{Om } -1 < c < 0: & \quad \frac{1}{2b} \frac{1+b}{1-b} \text{ där } b = \sqrt{-c} \end{aligned}$$

Avsnitt 2

2. $\frac{\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x}{16}$

4. Båda är $1/2$.

5. $1/2$ respektive 0.

Avsnitt 3

1. (a) $y = \frac{t^2}{3} + Ct^{-1}$ (b) $y = \frac{t^2}{5} + Ct^{-3}$

(c) $y = t^2 + Ct$ (d) $y = \frac{1}{4} + C(t^2 + 4)^{-2}$

2. $f(x) = (1 + x^2/2)e^{-x^2}$

3. (a) $y = \sqrt{2t+1}$ (b) $y = \sqrt{t^2+1}$ (c) $y = (1-t)^{-1}$

4. (a) $y = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ (b) $y(t) = 1$ (c) $y(t) = -1$

5. (a) $y = Ct$ (b) $y = C(2t+1)^{3/2}$ (c) $y = -\ln(C + e^{-t})$

(d) $y = Ce^{t/2} - t - 2$ (e) $\ln|1 - e^y| + e^t = C$ eller $y(t) = 0$

6. $y^2 - x^2 = 3$ eller $x^2 + y^2 = 5$

7. (a) $y = Ae^t + Be^{2t}$ (b) $y = (A + Bt)e^{-2t}$

(c) $y = e^{t/2}(A \sin \frac{t}{2} + B \cos \frac{t}{2})$ (d) $y = Ae^{2t/3} + B$

8. (a) $y = \frac{1}{10} \cdot (e^{9t} - e^{-t})$ (b) $y(t) = 0$ (c) $y = A \sin 2t$

9. k godtyckligt heltal $\neq 0$. Lösningarna är $y = A \sin kt$ där A är en godtycklig konstant.

10. (a) $y = \frac{t+5}{2} + (A + Bt)e^{2t}$ (b) $y = t^2 - 7t + 9 + A \sin t\sqrt{2} + B \cos t\sqrt{2}$

(c) $y = 0.1t^3 + 0.21t^2 + 0.234t + 0.1218 + Ae^{5t} + Be^{2t}$

(d) $y = 0.5e^t + A \sin t + B \cos t$

(e) $y = -\frac{\sin 2t}{3} + A \sin t + B \cos t$ (f) $y = (A + Bt + \frac{t^3}{6})e^t$

(g) $y = e^{-t}(0.2 \cos 2t - 0.1 \sin 2t) + A \sin t + B \cos t$

11. $y = (1 + 0.5t)e^t + e^{-t}$